

Changepoint-Analyse für Kenngrößen der Telekommunikation: Theorie und Simulationen

DISSERTATION

zur

Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.),

dem Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
vorgelegt von

Jochen Friedrich Giese
aus Marburg

Marburg/Lahn 2002

Vom Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
als Dissertation am 09.12.2002 angenommen.

Erstgutachter: Prof. Dr. Josef Steinebach

Zweitgutachter: Prof. Dr. Volker Mammitzsch

Tag der mündlichen Prüfung: 14.02.2003.

Zusammenfassung

Thema der vorliegende Dissertation ist die theoretische Untersuchung von Verfahren der Changepoint-Analyse zur Anwendung auf Telekommunikationsdaten.

Die hier betrachteten Modelle sind durch Modelle motiviert, wie sie für Fragestellungen der Telekommunikation verwendet werden. Insbesondere für Marktanteilsuntersuchungen bezogen auf telefonierte Minuten erweisen sich lineare Modelle als geeignet. Die Fehlerterme sind dabei in der Praxis häufig nicht unabhängig, wie in theoretischen Untersuchungen oft vorausgesetzt wird, sondern als korreliert anzusehen. Aus dieser Motivation heraus verallgemeinern wir Verfahren der a posteriori Changepoint-Analyse für lineare Modelle mit unabhängigen Fehlern auf solche mit korrelierten Fehlertermen. Eine weitere wichtige sehr allgemein definierte Klasse von Modellen ist die Modellklasse der State-Space Modelle. State-Space Modelle werden insbesondere für Prognosen des Verkehrsaufkommens im Telekommunikationsbereich herangezogen. Es werden neue Verfahren zur a posteriori Changepoint-Analyse für diese Modellklasse entwickelt und auf ihre asymptotischen Eigenschaften untersucht.

Bezüglich sequentieller Verfahren der Changepoint-Analyse stellen wir bekannte praxisorientierte Verfahren vor und setzen diese auf die hier betrachteten linearen Modelle sowie State-Space Modelle um.

Theoretisch erzielte Ergebnisse werden durch Simulationen überprüft. Sämtliche Programme, die zu Simulationsstudien verwendet werden, sind in der statistischen Programmiersprache R geschrieben.

Die hier untersuchten Verfahren werden in [Gie02a] auf Realdaten der Deutschen Telekom angewendet. Dabei wird einerseits die Konzeption von Frühwarnsystemen diskutiert, die sequentiell Beobachtungen auf Strukturbrüche (Abweichungen von einem vorgegebenen Modell) untersuchen. Andererseits betrachten wir dort Analysesysteme, die eine Menge von Beobachtungen im Nachhinein ("a posteriori") auf vorhandene Changepoints überprüfen.

Bezeichnungen und Symbole

\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen unter Ausschluss der 0,
\mathbb{N}_0	Menge der natürlichen Zahlen unter Einschluss der 0,
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen,
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen,
\mathbb{R}^p	Menge der p -dimensionalen Vektoren mit reellwertigen Komponenten,
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen,
P -f.s.	P -fast sicher,
i.i.d.	unabhängig identisch verteilt,
W-Maß	Wahrscheinlichkeitsmaß,
(Ω, \mathcal{A}, P)	Wahrscheinlichkeitsraum, bestehend aus dem Tripel Ω : Grundraum, \mathcal{A} : σ -Algebra auf Ω , P : auf \mathcal{A} definiertes W-Maß,
\mathcal{B}^p	p -dimensionale Borelsche σ -Algebra,
$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$	für $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, \mathcal{A} σ -Algebra: $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$,
$[x]$	größte ganze Zahl n mit $n \leq x \in \mathbb{R}$,
x_+	$x_+ := \max\{0, x\}$ für $x \in \mathbb{R}$,
\log	für $x \in \mathbb{R}$: $\log x := \ln(\max(x, 1))$, wobei \ln der natürliche Logarithmus,
$\mathbb{1}_A$	Indikatorfunktion auf der Menge A ,

x'	für $x \in \mathbb{R}^n$: Transponierte von x ,
A'	für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$: Transponierte von A ,
I_ℓ	Einheitsmatrix der Dimension ℓ ,
$\text{Sp}(A)$	Spur einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, für $A := (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$: $\text{Sp}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$,
$\ \cdot\ $	Für $X := (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$: $\ X\ := \sqrt{\sum_{i=1}^p x_i^2}$,
$\ \cdot\ $	für $A := (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$: $\ A\ := \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$,
AR(p)-Prozess	Autoregressiver Prozess der Ordnung p ,
MA(q)-Prozess	Moving Average Prozess der Ordnung q ,
ARMA(p, q)-Prozess	Autoregressiver Moving Average Prozess der Ordnung p im autoregressivem Anteil und der Ordnung q im Moving Average Anteil,
$\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$	Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen a_1, \dots, a_n .
Für Funktionen $f, g : A \rightarrow B, A, B \subset \mathbb{R}$:	
$f \uparrow \infty$	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$ und $f(t_1) \leq f(t_2) \ \forall t_1 \leq t_2, \forall t_1, t_2 \in A$,
$f \downarrow 0$	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ und $f(t_1) \geq f(t_2) \ \forall t_1 \leq t_2, \forall t_1, t_2 \in A$,
$f(t) = o(g(t))$	$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$,
$f(t) = \mathcal{O}(g(t))$	$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left \frac{f(t)}{g(t)} \right < \infty$.

Für Zufallsvektoren X, Y, X_1, \dots, X_n
mit reellwertigen Komponenten:

$X^{(j)}$	j -te Komponente des Zufallsvektors X ,
$E X$	Erwartungswert des Zufallsvektors X ,
$\text{Var } X$	Varianz der Zufallsvariablen X : $E (X - E X) (X - E X)'$,
$\text{Cov } X$	(Varianz-)Kovarianzmatrix des Zufallsvektors X : $E (X - E X) (X - E X)'$,
$\text{Cov } (X, Y)$	Kovarianzmatrix der Zufallsvektoren X, Y : $E (X - E X) (Y - E Y)'$,
$\ X\ _p$	L_p -Norm: $E (\ X\ ^p)^{\frac{1}{p}}$,
ρ_θ	$\rho_\theta := \rho_\theta (X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E \ X_i\ ^\theta$ für $\theta \in \mathbb{R}$,
$X \sim N(\mu, \Sigma)$	X ist normalverteilt mit $E X = \mu$, $\text{Cov } X = \Sigma$.

Für (mehrdimensionale) stochastische Prozesse $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}, \{Y_t\}_{t \in \mathbb{R}}$
mit reellwertigen Komponenten und einen Zufallsvektor X
mit reellwertigen Komponenten:

$X_t \xrightarrow{\mathcal{D}} X$	Konvergenz nach Verteilung: $\lim_{t \rightarrow \infty} F_t(z) = F(z) \quad \forall z \in C_F$, wobei C_F die Menge der Stetigkeitspunkte von F , F_t die Verteilungsfunktion von X_t und F die Verteilungsfunktion von X ,
$X_t \xrightarrow{P} X$	P -stochastische Konvergenz: $\lim_{t \rightarrow \infty} P(\{\ X_t - X\ > \varepsilon\}) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$,
$X_t \xrightarrow{P-f.s.} X$	P -fast sichere Konvergenz: $P(\{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists t_\varepsilon: \ X_t - X\ < \varepsilon \quad \forall t \geq t_\varepsilon\}) = 1$,

$$X_t = o_P(Y_t) \quad \left\| \frac{X_t}{Y_t} \right\| \xrightarrow{P} 0 \quad (t \rightarrow \infty),$$

$$X_t = \mathcal{O}_P(Y_t) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists T_0 \in \mathbb{R}, C > 0: \\ P(\|X_t\| \leq C\|Y_t\|) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall t \geq T_0,$$

$$X_t \stackrel{P-f.s.}{=} o(Y_t) \quad \left\| \frac{X_t}{Y_t} \right\| \xrightarrow{P-f.s.} 0 \quad (t \rightarrow \infty),$$

$$X_t \stackrel{P-f.s.}{=} \mathcal{O}(Y_t) \quad P\left(\limsup_{t \rightarrow \infty} \left\| \frac{X_t}{Y_t} \right\| < \infty\right) = 1.$$

Vereinbarung 0.1. *Unter einer Zufallsvariablen verstehen wir stets eine reellwertige Zufallsvariable. Mit einem Zufallsvektor ist ein Vektor gemeint, dessen Komponenten reellwertige Zufallsvariablen sind. Ebenso verstehen wir unter einer Zufallsmatrix eine Matrix, deren Komponenten reellwertige Zufallsvariablen sind.*

Bemerkung 0.1. *Die P -fast sichere bzw. die P -stochastische Konvergenz von Zufallsmatrizen ist durch die entsprechende Konvergenz für die einzelnen Komponenten definiert.*

Vereinbarung 0.2. *Für eine \mathbb{R}^p -wertige Zufallsvariable X schreiben wir auch $X \in \mathbb{R}^p$ anstatt $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$. Ebenso schreiben wir für eine Zufallsmatrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ anstatt $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$.*

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung und Überblick	1
2	Invarianzprinzipien	7
3	A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints	20
3.1	Einführung	20
3.2	A posteriori Changepoint-Analyse in linearen Modellen für abrupte Changepoints im Regressionsvektor mit dem Union-Intersection Test . .	21
3.2.1	Modell	21
3.2.2	Ergebnisse	25
3.2.3	Vorbereitungen	30
3.2.4	Asymptotisches Verhalten des Union-Intersection Test	43
3.2.5	Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints	46
3.2.6	Schätzer für \mathcal{H}_k	46
3.2.7	Simulationen	64
3.3	A posteriori Changepoint-Analyse in linearen Modellen für abrupte Changepoints im Fehlerprozess	72
3.3.1	Modell	72
3.3.2	Asymptotisches Verhalten der Teststatistik	74
3.3.3	Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints	76
3.3.4	Varianzschätzer	79
3.3.5	Simulationen	81
3.4	A posteriori Changepoint-Analyse in State-Space Modellen für abrupte Changepoints	92
3.4.1	Modell	92
3.4.2	Eigenschaften von State-Space Modellen	95
3.4.3	Beispiele für State-Space Modelle	96
3.4.4	Changepoint-Modelle	98
3.4.5	Konstruktion von Teststatistiken	99
3.4.6	Asymptotisches Verhalten der Teststatistiken	103
3.4.7	Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints	109
3.4.8	Varianzschätzer	114
3.4.9	Simulationen	132
4	A posteriori Changepoint-Analyse für graduelle Changepoints	147
4.1	Einführung	147
4.2	A posteriori Changepoint-Analyse in State-Space Modellen für graduelle Changepoints	148
4.2.1	Modell	148
4.2.2	Changepoint-Modelle	148
4.2.3	Konstruktion einer Teststatistik	149
4.2.4	Asymptotisches Verhalten der Teststatistik	151
4.2.5	Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints	154
4.2.6	Varianzschätzer	156

5	Sequentielle Changepoint-Analyse	157
5.1	Grundlagen der sequentiellen Changepoint-Analyse	157
5.1.1	Shewhart Chart	158
5.1.2	CUSUM Chart	158
5.1.3	EWMA Chart	159
5.1.4	Kernel Charts	160
5.1.5	Welche Kontrollkarte ist geeignet?	160
5.1.6	Bestimmung von kritischen Werten	160
5.2	Korrelierte Beobachtungen	161
5.3	Einfluss von Parameterschätzungen	161
5.4	Kontrollkarten für den mehrdimensionalen Fall	162
5.4.1	Mehrdimensionaler Shewhart Chart	162
5.4.2	Mehrdimensionaler CUSUM Chart	162
5.4.3	Mehrdimensionaler EWMA Chart	163
5.4.4	Rückführung des mehrdimensionalen auf den eindimensionalen Fall	163
5.5	Sequentielle Changepoint-Analyse in linearen Modellen	163
5.6	Sequentielle Changepoint-Analyse in State-Space Modellen	163
5.6.1	Sequentielle Changepoint-Analyse über Kalman-Rekursionen . . .	165
5.6.2	Sequentielle Changepoint-Analyse unter Verwendung der Beobachtungen Y_i	167
5.6.3	Sequentielle Changepoint-Analyse unter Verwendung der Δ_i . . .	169
5.6.4	Varianzschätzer	169
6	Fazit und Ausblick	170
6.1	Simulationsstudien zur sequentiellen Changepoint Analyse	170
6.2	Untersuchung von Changepoint-Modellen mit Wechsel in der Varianz . .	170
6.3	Untersuchung gradueller Veränderungen in linearen Modellen	170
7	Anhang	171
7.1	Grundlagen der Linearen Algebra	171
7.2	Eigenschaften von Konvergenzarten und der Landausymbole	173
7.3	Beweise der Invarianzprinzipien	180
8	Literaturverzeichnis	195

1 Einführung und Überblick

Die Changepoint-Analyse hat ihre Ursprünge in der anwendungsorientierten statistischen Prozesskontrolle (SPC=Statistical Process Control). Typische Problemstellung der Changepoint-Analyse ist die folgende:

Wir betrachten eine Folge von Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) . Die Realisierungen dieser Zufallsvariablen (z.B. Marktanteile der Deutschen Telekom in bestimmten Kundensegmenten) können beobachtet werden. Wir wollen wissen, ob die Beobachtungen einem vorgegebenen Modell genügen, oder ob an einem "Changepoint" ein Strukturbruch festgestellt werden kann.

Man unterscheidet grundsätzlich zwischen zwei verschiedenen Arten der Changepoint-Analyse:

- a posteriori Changepoint-Analyse,
- sequentielle Changepoint-Analyse.

Bei der a posteriori Changepoint-Analyse (vgl. Kapitel 3 und Kapitel 4) betrachtet man einen abgeschlossenen Zeitraum der Vergangenheit und prüft, ob während dieses Zeitraums ein Strukturbruch statistisch nachgewiesen werden kann. Eine für die Telekom wertvolle Anwendung der a posteriori Changepoint-Analyse liegt in der Konzeption von Analysesystemen. Werden in der Vergangenheit signifikante Abweichungen von einem vorgegebenen Modell festgestellt, so kann man versuchen, Gründe für diese Abweichungen (z.B. neues eigenes Produkt, neues Produkt eines Wettbewerbers, Preissenkungsmaßnahmen von Wettbewerbern, Markteintritt von Wettbewerbern, Abschaltung eines Wettbewerbers wegen Insolvenz etc.) zu bestimmen. Von hohem Interesse ist dabei im Falle eines Changepoints insbesondere die Bestimmung des Zeitpunkts des Strukturbruchs.

Bei der sequentiellen Changepoint-Analyse (vgl. Kapitel 5) geht man in der Weise vor, dass sequentiell, d.h. Beobachtungspunkt für Beobachtungspunkt, geprüft wird, ob eine signifikante Abweichung vom vorgegebenen Modell vorliegt. Eine Anwendung von Verfahren der sequentiellen Changepoint-Analyse besteht in der Konzeption von Frühwarnsystemen. Ziel eines Frühwarnsystems ist es, einerseits möglichst früh nach einem Changepoint, andererseits aber möglichst zuverlässig (kein Alarm, wenn kein Changepoint vorliegt, d.h. Fehler 1. Art möglichst klein) einen Alarm auszulösen.

Ein weiteres Klassifizierungsmerkmal von Verfahren bzw. Problemstellungen der Changepoint-Analyse ist eine Unterscheidung nach der Art des Changepoints. Man unterscheidet "abrupte" Changepoints von "graduellen" Changepoints. Unter einem abrupten Changepoint verstehen wir einen plötzlichen Strukturbruch von einem Zeitpunkt zum nächsten. Graduelle Changepoints beschreiben eine kontinuierliche Veränderung, die sich über mehrere Zeiteinheiten hinweg entwickelt.

Die meisten Untersuchungen zur Changepoint-Analyse beziehen sich auf die "plötzlichen" abrupten Veränderungen (für einen Überblick vgl. z.B. [CsHo97]). In den letzten Jahren wurden einige Arbeiten zu den "kontinuierlichen" graduellen Strukturbrüchen für die a posteriori Changepoint-Analyse veröffentlicht (vgl. z.B. [Jar98], [Hus98b], [Hus99], [HuSt00], [Ste00]). Schmid hat in [Sch97] ein sehr allgemeines Modell zur sequentiellen Changepoint-Analyse formuliert, das auch graduelle Veränderungen beinhaltet.

1 Einführung und Überblick

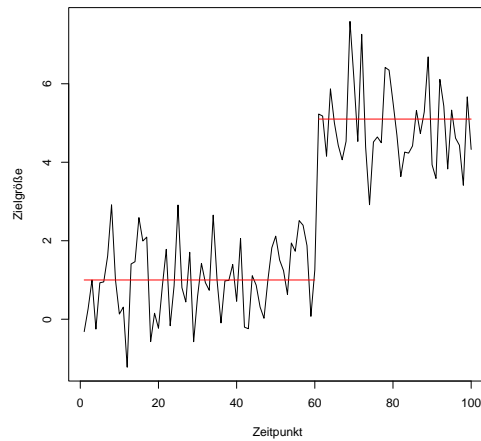


Abbildung 1: Beispiel für einen abrupten Changepoint zum Zeitpunkt 60.

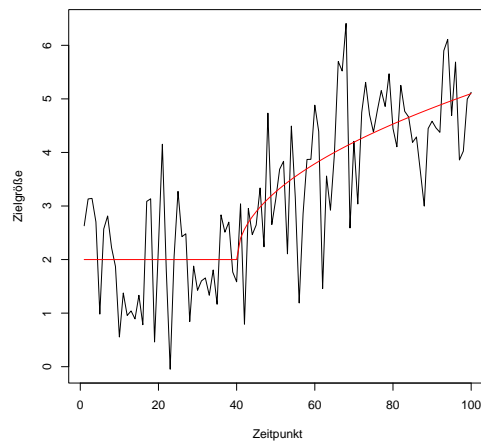


Abbildung 2: Beispiel für einen graduellen Changepoint zum Zeitpunkt 40.

In Kapitel 3 untersuchen wir, die a posteriori Changepoint-Analyse betreffend, zunächst den Fall von abrupten Changepoints. In Kapitel 4 betrachten wir graduelle Veränderungen.

Bezüglich sequentieller Verfahren stellen wir in Kapitel 5 verschiedene bekannte Teststatistiken vor, die sich sowohl bei abrupten Strukturbrüchen als auch bei graduellen Veränderungen anwenden lassen.

Wir beschränken uns bei unseren Untersuchungen auf nichtparametrische Verfahren der Changepoint-Analyse, d.h. wir machen keine speziellen Verteilungsannahmen an die jeweiligen Fehlerprozesse (z.B. Normalverteilungsannahme), da man bei den hier durchgeführten praktischen Anwendungen (vgl. [Gie02a]) die zu Grunde liegende Verteilung i.A. nicht kennt.

Eine zentrale Frage, die vor der Konzeption geeigneter Changepoint-Teststatistiken beantwortet werden muss, ist die Frage nach dem Modell, von dem Abweichungen festgestellt werden sollen. Dazu betrachten wir beispielhaft zwei Modelle, die bei der Deutschen Telekom in Bruchsal für Marktanteilsuntersuchungen verwendet werden.

Marktanteilsmodell 1:

$$\begin{aligned} \text{Logit}(MA_T(t)) = a_0 &+ a_T \log(P_T(t)) \\ &+ a_W \log(P_W(t)) \\ &+ b \text{Logit}(MA_T(t-1)) + \varepsilon(t), \end{aligned}$$

$$\text{Logit}(x) := -\log\left(\frac{x}{1-x}\right), 0 < x < 1,$$

$MA_T(t)$ Marktanteil Telekom zum Zeitpunkt t ,

$P_T(t)$ Preis Telekom zum Zeitpunkt t ,

$P_W(t)$ Preis Wettbewerber zum Zeitpunkt t ,

$\varepsilon(t)$ Fehlerprozess,

a_0, a_T, a_W, b zu schätzende Modellparameter.

Marktanteilsmodell 2:

$$\begin{aligned} \Delta \text{Logit}(MA_T(t)) = a_0 &+ a_1 \log\left(\frac{P_T(t)}{P_T(t-1)}\right) \\ &+ a_2 \log\left(\frac{P_W(t)}{P_W(t-1)}\right) + a_3 \log\left(\frac{P_T(t-1)}{P_T(t-2)}\right) \\ &+ a_4 \log\left(\frac{P_W(t-1)}{P_W(t-2)}\right) \\ &+ a_5 \Delta \text{Logit}(MA_T(t-1)) \\ &+ D(t) + \varepsilon(t), \end{aligned}$$

$$\Delta \text{Logit}(MA_T(t)) := \log\left(\frac{MA_T(t)}{1-MA_T(t)}\right) - \log\left(\frac{MA_T(t-1)}{1-MA_T(t-1)}\right),$$

a_0, \dots, a_5 zu schätzende Modellparameter,

$D(t)$ lineare Trendkomponente.

Wir betrachten zur Veranschaulichung der Modellbildung die Marktanteile der Deutschen Telekom für Deutschlandverbindungen über alle Kundensegmente im Zeitraum Januar 1998 bis September 2000.

1 Einführung und Überblick

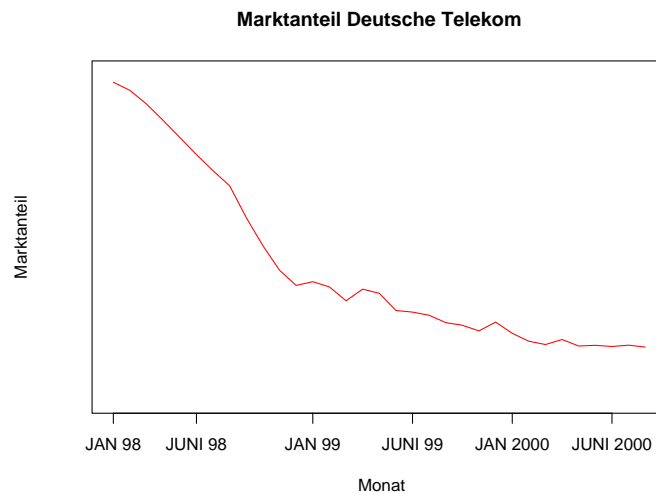


Abbildung 3: Marktanteile Deutsche Telekom, Januar 1998 bis September 2000 für Deutschlandverbindungen.

Wir führen eine Schätzung der Modellparameter a_0, a_T, a_W, b des ersten Modells mittels Kleinster-Quadrate Schätzer durch und vergleichen unser Modell mit den tatsächlichen Marktanteilen.

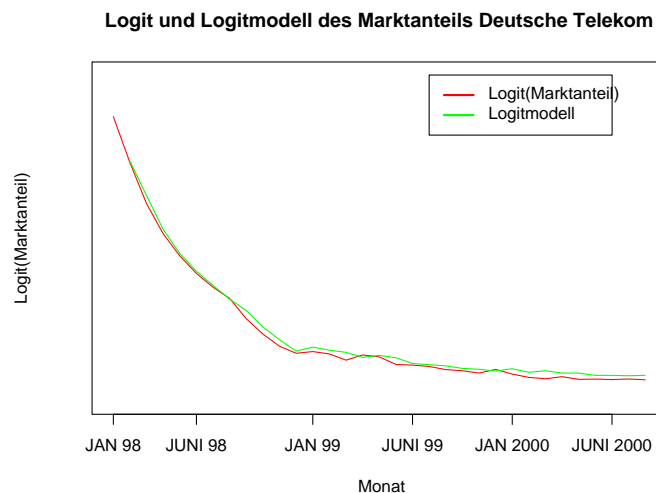


Abbildung 4: Logit und Logitmodell 1 der Marktanteile Deutsche Telekom, Januar 1998 bis September 2000 für Deutschlandverbindungen.

Beide oben angeführten Modelle sind lineare Modelle mit endogener(n) Komponente(n). Durch endogene Einflussgrößen werden verzögernde Wirkungen ("lags") in das Modell integriert. Solche verzögernden Wirkungsmechanismen treten in zahlreichen ökonometrischen Modellen auf (vgl. z.B. [Hue89]). Bezogen auf die Marktanteilsmodelle kann man das Auftreten dieser endogenen Terme dahingehend interpretieren, dass

nicht alle Kunden unmittelbar auf eine Änderung der Preise reagieren, sondern dass es bei einem Teil der Kunden eine Zeit lang dauert (möglicherweise bis zur nächsten Telefonrechnung), bis eine Reaktion auf die veränderte Preisstruktur eintritt. Die Marktanteilsmodelle können noch durch Hinzunahme weiterer Einflussgrößen erweitert werden, z.B. zur Berücksichtigung saisonaler Effekte. Zu weiteren Erläuterungen bezüglich Modellen für Kommunikationskenngrößen vgl. [Hil00] sowie [Gie02a].

Zur a posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints in linearen Modellen mit unabhängig identisch verteilten Fehlertermen gibt es bereits Untersuchungen (vgl. z.B. [HoSh95] und [CsHo97]). In praktischen Anwendungen liegen allerdings meist korrelierte Fehlerterme vor (vgl. obige Marktanteilsmodelle). Aus dieser Motivation heraus übertragen wir in Abschnitt 3.2 bekannte Ergebnisse auf den Fall korrelierter Fehlerterme.

Die in Abschnitt 3.2 behandelte Teststatistik testet auf Veränderungen des Regressionsvektors, der in dem linearen Modell das Gewicht der einzelnen Einflussgrößen bestimmt. In Abschnitt 3.3 diskutieren wir eine auf der Betrachtung von Residuen (Abweichungen der beobachteten Zielgröße vom Modell) basierende Teststatistik, die auf plötzliche Strukturbrüche im Fehlerprozess eines linearen Modells testet.

Für Verkehrswertprognosen im Telekommunikationsbereich werden häufig State-Space Modelle verwendet (vgl. z.B. [AbSa85], [ChGa85], [Tom85]). Darüber hinaus sind State-Space Modelle sehr allgemein definiert, so dass sie sehr viele Modellklassen als Spezialfälle beinhalten. So kann man z.B. lineare Modelle mit zufälligem Regressor oder ARMA-Zeitreihen (ARMA = Autoregressive Moving Average) als State-Space Modelle formulieren (vgl. Abschnitt 3.4.3). Wählt man spezielle State-Space Modelle, bei denen die Designmatrizen H_i , G_i (s. unten) unabhängig vom Zeitpunkt i sind, so sind State-Space Modelle unter gewissen Regularitätsbedingungen äquivalent zu ARMA-Zeitreihen (vgl. Abschnitt 3.4.2 und 3.4.3 oder [Aok87]: Abschnitt 4.3).

In Abschnitt 3.4 betrachten wir folgendes State-Space Modell:

$$\begin{aligned} Y_i &= H_i \beta_i + \varepsilon_i \quad (i \in \mathbb{Z}), \\ \beta_i &= G_i \beta_{i-1} + \omega_i \quad (i \in \mathbb{Z}), \end{aligned}$$

$Y_i \in \mathbb{R}^\ell$, $H_i \in \mathbb{R}^{\ell \times p}$, $G_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $\beta_i \in \mathbb{R}^p$,
 $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ bzw. $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ ℓ -dimensionaler bzw. p -dimensionaler Fehlerprozess,
 $\{H_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $\{G_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ zufällige Matrizenfolgen mit Einflussgrößen,
 $\{\beta_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ Folge unbekannter Parameter.

Zur Changepoint-Analyse in State-Space Modellen gibt es bereits Untersuchungen (vgl. z.B. [BaNi93]). Die uns bekannten bisher angewendeten Verfahren zur Changepoint-Analyse in State-Space Modellen basieren auf einer Anwendung rekursiver Schätzer. Über Kalman-Rekursionen werden Schätzer für die β_i und damit Residuen bestimmt, die auf signifikante Veränderungen getestet werden können. Allerdings gibt es unseres Wissens bislang keine Untersuchungen zur a posteriori Changepoint-Analyse, die basierend auf Invarianzprinzipien (vgl. Kapitel 2) asymptotische Verteilungsfunktionen von Teststatistiken herleiten. In Abschnitt 3.4 stellen wir ein neues Verfahren zur a posteriori Changepoint-Analyse in State-Space Modellen bezüglich abrupter Changepoints vor, das aufbauend auf Invarianzprinzipien (vgl. Kapitel 2) u.a. die asymptotische Verteilung der diskutierten Teststatistiken liefert. In Abschnitt 4.2 entwickeln wir analog ein Verfahren zur Changepoint-Analyse für graduelle Veränderungen

in State-Space Modellen.

Sowohl bei unseren Untersuchungen zur a posteriori Changepoint-Analyse für lineare Modelle als auch bei den Betrachtungen zur a posteriori Changepoint-Analyse für State-Space Modelle lassen wir zu, dass die Matrizen mit Einflussgrößen zufälligen Schwankungen unterliegen. Diese Verallgemeinerung ist durch praktische Anwendungen motiviert. So kann es vorkommen, dass bei Datenanalysen einige Datensätze fehlende oder fehlerhafte Werte aufweisen. Diese werden häufig durch einen Wert ersetzt, der an dieser Stelle plausibel erscheint, oder ganz aus der Datenanalyse gestrichen. Darüber hinaus unterliegen gemessene Einflussgrößen oft zufälligen Schwankungen.

Hauptergebnisse der in Kapitel 3 und Kapitel 4 durchgeführten Untersuchungen sind asymptotische Aussagen über die betrachteten Teststatistiken, Parameterschätzer (insbesondere Schätzer für die i.A. unbekannte Varianz der Fehlerprozesse) sowie Schätzer für den Zeitpunkt eines Changepoints. Hierzu werden Invarianzprinzipien verwendet, die auf die sogenannte Ungarische Schule zurückgehen (vgl. z.B. [Csö75a], [Csö75b], [KoMaTu75], [KoMaTu76], [Maj76a], [Maj76b]). Die hier benötigten Invarianzprinzipien werden in Kapitel 2 vorgestellt. Zur Übertragung der bezüglich linearer Modelle betrachteten Teststatistiken auf Modelle mit korrelierten Fehlertermen leiten wir ein neues Invarianzprinzip für nicht notwendig unabhängige, nicht notwendig stationäre Zufallsvektoren her (Theorem 2.6). Ebenso wird ein neues Invarianzprinzip für die Untersuchung gradueller Veränderungen in State-Space Modellen entwickelt (Theorem 2.5).

Bei den in Kapitel 5 vorgestellten Verfahren zur sequentiellen Changepoint-Analyse beschränken wir uns darauf, bekannte Verfahren der sequentiellen Changepoint-Analyse auf die hier betrachteten linearen Modelle und State-Space Modelle umzusetzen.

Die theoretisch erzielten Ergebnisse werden begleitend durch Simulationen überprüft. Dies ist einerseits von Bedeutung, da viele theoretische Resultate asymptotische Aussagen machen ("unendlich viele" Beobachtungen). Hier gilt es zu überprüfen, ob die asymptotischen Ergebnisse auch für die Praxis verwendbar sind. Im Rahmen praktischer Untersuchungen haben wir beispielsweise häufig Kommunikationsdaten für einen Zeitraum von ein bis zwei Jahren (etwa 50-100 Wochen) vorliegen. Es stellt sich die Frage, ob 50-100 Beobachtungen (Simulationen) ausreichen, um die asymptotisch erzielten Ergebnisse zu bestätigen. Ein weiteres durch Simulationen verfolgtes Ziel ist die Ermittlung mittlerer Laufzeiten und kritischer Werte von Teststatistiken zur sequentiellen Changepoint-Analyse. Die Bestimmung dieser Werte ist nicht immer mit analytischen Hilfsmitteln durchführbar (vgl. Kapitel 5).

Anwendungsbeispiele von hier theoretisch diskutierten und durch Simulationen untersuchten Verfahren der sequentiellen und der a posteriori Changepoint-Analyse auf Kommunikationsdaten der Deutschen Telekom findet man in [Gie02a]. Wir betrachten dort verschiedene Modelle für Marktanteile und den Markt (unter dem Markt versteht man das Gesamtvolumen telefonierter Minuten) im Zeitverlauf.

In Kapitel 6 ziehen wir ein Fazit aus unseren Untersuchungen und führen in einem Ausblick einige Aspekte an, die hier nicht oder nur unvollständig behandelt werden, aber interessante Ergebnisse versprechen.

In Kapitel 7 stellen wir Grundlagen aus der Linearen Algebra und der Wahrscheinlichkeitstheorie zusammen. Darüber hinaus beweisen wir zwei für unsere Untersuchungen benötigte neue Invarianzprinzipien (Theorem 2.5 und Theorem 2.6).

2 Invarianzprinzipien

Invarianzprinzipien sind ein zentrales Hilfsmittel für die asymptotische Untersuchung stochastischer Prozesse. Invarianzprinzipien liefern Aussagen über die Konvergenz standardisierter Partialsummen von Folgen von Zufallsvariablen oder Zufallsvektoren gegen eine Normalverteilung bzw. Aussagen über die Approximation stochastischer Prozesse durch Wiener-Prozesse bzw. verwandte Prozesse. Wir geben in diesem Kapitel einen Überblick über Invarianzprinzipien und stellen insbesondere die Invarianzprinzipien vor, die wir hier verwenden. Dieser Überblick erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit, sondern soll vielmehr dem besseren Verständnis der Überlegungen der folgenden Kapitel dienen.

Starke (P -f.s. gültige) Invarianzprinzipien existieren z.B., falls eine Folge unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen vorliegt. Strassen zeigt in [Str64], dass man zu jeder reellen Zufallsvariablen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) mit Erwartungswert 0 und Varianz 1 einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$ und zwei Folgen unabhängiger Zufallsvariablen $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ und $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ auf $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$ konstruieren kann, so dass $\tilde{P}_{X_i} = P_X$, $\tilde{P}_{Y_i} \sim N(0, 1) \forall i \in \mathbb{N}$ und

$$\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i \stackrel{P-f.s.}{=} o\left((n \log \log n)^{\frac{1}{2}}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Major zeigt in [Maj76b], dass sich unter den angegebenen Bedingungen keine bessere Konvergenzrate erreichen läßt.

Weitergehende Untersuchungen, durch die bessere Konvergenzraten unter stärkeren Integrierbarkeitsbedingungen an die Zufallsvariable X hergeleitet werden können, werden insbesondere von Komlós, Major und Tusnády durchgeführt (vgl. [KoMaTu75], [KoMaTu76]). Sie zeigen, dass unter der Voraussetzung

$$E|X|^{2+\delta} < \infty \quad \text{für ein } \delta > 0$$

mit den obigen Bezeichnungen gilt:

$$\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i \stackrel{P-f.s.}{=} o\left(n^{\frac{1}{2+\delta}}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Darüber hinaus zeigen sie, dass unter der Bedingung, dass die Momenterzeugende Funktion in einer Umgebung der 0 existiert, d.h.

$$E \exp(tX) < \infty \quad \forall |t| < t_0, \exists t_0 > 0,$$

sich die obige Konvergenzrate nochmals verbessern läßt:

$$\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i \stackrel{P-f.s.}{=} \mathcal{O}(\log n) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Diese Konvergenzrate läßt sich nicht mehr verbessern, falls X nicht normalverteilt ist (vgl. z.B. Theorem 1.7. in [CsHo93]).

Philipp ([Phi79]) bzw. Berger ([Ber90]) verallgemeinern Strassens Invarianzprinzip auf Zufallsvektoren. Einmahl ([Ein87b], [Ein89]) überträgt die Resultate von Komlós, Major und Tusnády auf den mehrdimensionalen Fall.

Die bisher erwähnten Arbeiten beschäftigen sich mit der Approximation von Partialsummen von i.i.d. Zufallsvariablen bzw. Zufallsvektoren. Kuelbs und Philipp ([KuPh80]), Dehling und Philipp ([DePh82]) sowie Dehling ([Deh83]) leiten Invarianzprinzipien für stationäre, nicht notwendig unabhängige Folgen von Zufallsvektoren her. Allgemeiner betrachten sie Zufallsvariablen, die in Banachräume abbilden. In unserer Arbeit beschränken wir uns allerdings auf Zufallsvektoren mit reellwertigen Wertebereichen der einzelnen Komponenten.

Vereinbarung 2.1. *Wir gehen im Folgenden stets davon aus, dass die Wahrscheinlichkeitsräume so gewählt sind, dass die betrachteten Zufallsvariablen bzw. Zufallsvektoren alle darauf definiert sind. Wir unterscheiden also nicht mehr wie oben zwischen verschiedenen Wahrscheinlichkeitsräumen.*

Wir stellen einige zentrale Resultate aus den angeführten Arbeiten für den mehrdimensionalen Fall vor.

Sei $\mathcal{G} := \{G : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \mid G \text{ stetig, } t^{-2}G(t)(\log \log t)^{-1} \text{ nicht fallend, } t^{-3}G(t) \text{ nicht wachsend}\}.$

Einmahl beweist in [Ein87b] das folgende Theorem.

Theorem 2.1. *Sei X ein Zufallsvektor mit Kovarianzmatrix Σ . Sei weiter $G \in \mathcal{G}$ und gelte $\int G(\|x\|)dP_X < \infty$. Dann gibt es zwei Folgen von Zufallsvektoren $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $P_{X_i} = P_X$ und $P_{Y_i} \sim N(0, \Sigma)$, so dass gilt:*

$$\left\| \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o(G^{-1}(n)) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Beweis: S. Beweis zu Theorem 2 in [Ein87b]. □

Bemerkung 2.1. *Sei für $0 < \delta \leq 1$:*

$$\begin{aligned} G_1 &: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \\ t &\rightarrow t^{2+\delta}. \end{aligned}$$

Dann gilt: $G_1 \in \mathcal{G}$.

Falls für einen Zufallsvektor X mit Kovarianzmatrix Σ gilt

$$\mathbb{E} \|X\|^{2+\delta} < \infty,$$

so folgt mit Theorem 2.1:

Es gibt zwei Folgen von Zufallsvektoren $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $P_{X_i} = P_X$ und $P_{Y_i} \sim N(0, \Sigma)$, so dass gilt:

$$\left\| \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o\left(n^{\frac{1}{2+\delta}}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

2 Invarianzprinzipien

Einmahl beweist in [Ein89] das folgende Theorem als Verallgemeinerung der Ergebnisse von Komlós, Major und Tusnády für den mehrdimensionalen Fall.

Theorem 2.2. *Sei X ein Zufallsvektor mit Kovarianzmatrix Σ und gelte:*

$$R(h) := \mathbb{E} \exp(h'X) < \infty \quad \text{für } \|h\| \leq \alpha, \alpha > 0,$$

$$\sup_{\|h\| \leq \alpha} \sup_{\|s\| > \delta} \frac{|R(h + is)|}{R(h)} < 1 \quad \text{für ein } \delta > 0.$$

Dann gibt es zwei Folgen von Zufallsvektoren $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $P_{X_i} = P_X$ und $P_{Y_i} \sim N(0, \Sigma)$, so dass gilt:

$$\left\| \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} \mathcal{O}(\log n) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Beweis: S. Beweis zu Theorem 3 in [Ein89]. □

Definition 2.1. *Eine Folge p -dimensionaler Zufallsvektoren $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $Y_i := (Y_i^{(1)}, \dots, Y_i^{(p)})$ heißt schwach stationär, wenn gilt:*

$$\gamma_{i,j}(h) := \text{Cov}(Y_1^{(i)}, Y_{h+1}^{(j)}) = \text{Cov}(Y_k^{(i)}, Y_{k+h}^{(j)}) \quad \forall h, k \in \mathbb{N}, 1 \leq i, j \leq p.$$

Vereinbarung 2.2. *Wenn wir im Folgenden von einer stationären Folge von Zufallsvektoren sprechen, verstehen wir darunter eine wie oben definierte schwach stationäre Folge von Zufallsvektoren.*

Den Grad der Korrelation einer Folge von Zufallsvektoren können wir durch Mischungsbedingungen ("Mixing Conditions") beschreiben.

Definition 2.2. *Eine Folge von Zufallsvektoren $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ heißt stark mischend (strong mixing), wenn gilt:*

$$\begin{aligned} & \exists \alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \alpha \downarrow 0: \\ & |P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \alpha(k) \\ & \forall A \in \mathcal{A}(Y_1, \dots, Y_\ell), B \in \mathcal{A}(Y_{\ell+k}, \dots) \quad \forall k, \ell \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Definition 2.3. *Eine Folge von Zufallsvektoren $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ heißt absolut regulär, wenn gilt:*

$$\begin{aligned} & \exists \beta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \beta \downarrow 0: \\ & \mathbb{E} \left(\sup_{B \in \mathcal{A}(Y_{k+\ell}, \dots)} |P(B|\mathcal{A}(Y_1, \dots, Y_\ell)) - P(B)| \right) \leq \beta(k) \quad \forall k, \ell \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Definition 2.4. *Eine Folge von Zufallsvektoren $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ heißt ϕ -mischend (ϕ -mixing), wenn gilt:*

$$\begin{aligned} & \exists \phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \phi \downarrow 0: \\ & |P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \phi(k)P(A) \\ & \forall A \in \mathcal{A}(Y_1, \dots, Y_\ell), B \in \mathcal{A}(Y_{\ell+k}, \dots) \quad \forall k, \ell \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Bemerkung 2.2. Sei $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvektoren. Dann gilt:

$$\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ } \phi\text{-mischend} \Rightarrow \{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ absolut regulär} \Rightarrow \{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ stark mischend.}$$

Genauer gilt:

$$\begin{aligned} & \{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ } \phi\text{-mischend mit Mischungskoeffizienten } \phi \\ \Rightarrow & \{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ absolut regulär mit Mischungskoeffizienten } \beta, \beta(k) = \mathcal{O}(\phi(k)) \quad (k \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ absolut regulär mit Mischungskoeffizienten } \beta \\ \Rightarrow & \{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ stark mischend mit Mischungskoeffizienten } \alpha, \alpha(k) = \mathcal{O}(\beta(k)) \quad (k \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Beweis: Vgl. z.B. [IbRo78]. □

Kuelbs und Philipp beweisen in [KuPh80] folgendes Invarianzprinzip für stationäre, nicht notwendig unabhängige Folgen von Zufallsvektoren.

Theorem 2.3. Sei $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine stark mischende Folge stationärer zentrierter p -dimensionaler Zufallsvektoren. Die Momente der Ordnung $2 + \delta$ existieren für ein $0 < \delta \leq 1$ und seien gleichmäßig beschränkt. Für den Mischungskoeffizienten gelte:

$$\alpha(k) = \mathcal{O}\left(k^{-(1+\varepsilon)(1+\frac{2}{\delta})}\right) \quad (k \rightarrow \infty) \quad \text{für ein } 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Dann konvergieren die beiden Summen in

$$\gamma_{ij} := \mathbb{E} X_1^{(i)} X_1^{(j)} + \sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{E} X_1^{(i)} X_k^{(j)} + \sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{E} X_k^{(i)} X_1^{(j)} \quad (1 \leq i, j \leq p)$$

absolut. Sei $\Sigma := (\gamma_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$. Dann gibt es eine Folge i.i.d. normalverteilter zentrierter p -dimensionaler Zufallsvektoren $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit Kovarianzmatrix Σ , so dass gilt:

$$\left\| \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i \right\| \stackrel{P\text{-f.s.}}{=} o\left(n^{\frac{1}{2}-\lambda}\right) \quad (n \rightarrow \infty)$$

für ein $\lambda > 0$.

Beweis: S. Beweis zu Theorem 4 in [KuPh80]. □

Horváth und Shao leiten in [HoSh95] ein Invarianzprinzip her, das die Betrachtung nicht notwendig stationärer, aber unabhängiger Zufallsvektoren ermöglicht. Dieses Theorem wenden wir in Abschnitt 3.4 an, um das asymptotische Verhalten von Teststatistiken zur Changepoint-Analyse in State-Space Modellen zu untersuchen.

Theorem 2.4. Sei $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger zentrierter p -dimensionaler Zufallsvektoren mit $\mathbb{E} \|X_i\|^{2+\delta} < \infty$ für ein $0 < \delta \leq 1$. Sei A_n die Kovarianzmatrix von $\sum_{i=1}^n X_i$. Es gelte:

Es gibt eine positiv semi-definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$, so dass:

$$\left\| \frac{1}{n} A_n - A \right\| = o\left((\log n)^{-\vartheta}\right) \quad \text{für ein } \vartheta > 2 + \frac{27}{\delta},$$

2 Invarianzprinzipien

und es gibt eine Konstante const_1 :

$$\mathbb{E} \|X_i\|^{2+\delta} \leq \text{const}_1 \left(\mathbb{E} \|X_i\|^2 \right)^{\frac{2+\delta}{2}}.$$

Dann gibt es eine Folge i.i.d. normalverteilter zentrierter p -dimensionaler Zufallsvektoren $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\text{Cov } Y_1 = A$, so dass gilt:

$$\left\| \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o \left(n^{\frac{1}{2}} (\log n)^{-\lambda} \right) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (2.0.1)$$

und es gibt für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge i.i.d. normalverteilter zentrierter p -dimensionaler Zufallsvektoren $\{Y_i^{\{n\}}\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\text{Cov } Y_1^{\{n\}} = A$, so dass gilt:

$$\left\| \sum_{i=k+1}^n X_i - \sum_{i=k+1}^n Y_i^{\{n\}} \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o \left((n-k)^{\frac{1}{2}} (\log(n-k))^{-\lambda} \right) \quad (n-k \rightarrow \infty) \quad (2.0.2)$$

Beweis: Den Beweis für (2.0.1) findet man in [HoSh95], Beweis zu Theorem A.1.

(2.0.2) folgt analog (vgl. auch Beweis zu (2.0.6) aus Theorem 2.5). \square

Für die Untersuchung gradueller Veränderungen benötigen wir ein Invarianzprinzip, das eine bessere Rate als Theorem 2.4 erzielt.

Theorem 2.5. Sei $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger zentrierter p -dimensionaler Zufallsvektoren mit $\mathbb{E} \|X_i\|^{2+\delta} < \infty$ für ein $\delta > 0$. Sei A_{k_1, k_2} die Kovarianzmatrix von $\sum_{i=k_1+1}^{k_2} X_i$. Es gelte:

Es gibt eine positiv semi-definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$ und ein $\vartheta > 0$, so dass:

$$\left\| \frac{1}{k_2 - k_1} A_{k_1, k_2} - A \right\| = o \left((k_2 - k_1)^{-\vartheta} \right) \quad (\min(k_1, k_2 - k_1) \rightarrow \infty), \quad (2.0.3)$$

und es gibt eine Konstante $\text{const}_2 > 0$:

$$\mathbb{E} \|X_i\|^{2+\delta} \leq \text{const}_2 \left(\mathbb{E} \|X_i\|^2 \right)^{\frac{2+\delta}{2}}. \quad (2.0.4)$$

Dann gibt es eine Folge i.i.d. normalverteilter zentrierter p -dimensionaler Zufallsvektoren $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\text{Cov } Y_1 = A$, so dass gilt:

$$\left\| \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o \left(n^{\frac{1}{2}-\lambda} \right) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (2.0.5)$$

und es gibt für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge i.i.d. normalverteilter zentrierter p -dimensionaler Zufallsvektoren $\{Y_i^{\{n\}}\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\text{Cov } Y_1^{\{n\}} = A$, so dass gilt:

$$\left\| \sum_{i=k+1}^n X_i - \sum_{i=k+1}^n Y_i^{\{n\}} \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o \left((n-k)^{\frac{1}{2}-\lambda} \right) \quad (n-k \rightarrow \infty) \quad (2.0.6)$$

für ein $\lambda > 0$.

2 Invarianzprinzipien

Beweis: Den Beweis zu Theorem 2.5 erbringen wir in Abschnitt 7.3. □

Bei den bisher angeführten Untersuchungen werden stets Folgen von Zufallsvektoren betrachtet, die entweder unabhängig oder stationär sind. Zum Nachweis asymptotischer Aussagen für die in den Abschnitten 3.2 bzw. 3.3 bezüglich linearer Modelle untersuchten Teststatistiken benötigen wir ein Invarianzprinzip für korrelierte, nicht notwendig stationäre Folgen von Zufallsvektoren. Das folgende Theorem liefert ein solches Invarianzprinzip unter der im Vergleich zu Theorem 2.3 stärkeren Mischungsbedingung der absoluten Regularität.

Theorem 2.6. *Sei $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge p -dimensionaler zentrierter absolut regulärer Zufallsvektoren. Für den Mischungskoeffizienten β gelte:*

$$\beta(k) \leq \text{const}_3 \left(k^{-(1+\varepsilon)(1+\frac{2}{\delta})} \right) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{für ein } 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (2.0.7)$$

Es gebe eine positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$ und ein $\vartheta > 11 + \frac{192}{\varepsilon\delta}$, so dass für die Kovarianzmatrizen A_{k_1, k_2} von $\sum_{i=k_1+1}^{k_2} X_i$ gilt:

$$\left\| \frac{1}{k_2 - k_1} A_{k_1, k_2} - A \right\| = o \left(\frac{k_2}{k_2 - k_1} (\log k_2)^{-\vartheta} \right) \quad (\min(k_1, k_2 - k_1) \rightarrow \infty). \quad (2.0.8)$$

Weiter gebe es Konstanten $\text{const}_4, \text{const}_5$, so dass gilt:

$$\max_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \|X_i\|^{2+\delta} \leq \text{const}_4, \quad (2.0.9)$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} \mathbb{E} \|X_i\|^2 \leq \text{const}_5 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbb{E} \|X_i\|^2)^{\frac{3+\tilde{\delta}}{2+\tilde{\delta}}} \quad \text{für ein } \tilde{\delta} \geq \frac{9\delta}{2(1-\delta)}. \quad (2.0.10)$$

Dann gibt es eine Folge i.i.d. normalverteilter zentrierter p -dimensionaler Zufallsvektoren $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\text{Cov } Y_1 = A$, so dass gilt:

$$\left\| \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o \left(n^{\frac{1}{2}} (\log n)^{-\lambda} \right) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (2.0.11)$$

und es gibt für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge i.i.d. normalverteilter zentrierter p -dimensionaler Zufallsvektoren $\{Y_i^{\{n\}}\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\text{Cov } Y_1^{\{n\}} = A$, so dass gilt:

$$\left\| \sum_{i=k+1}^n X_i - \sum_{i=k+1}^n Y_i^{\{n\}} \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o \left((n-k)^{\frac{1}{2}} (\log(n-k))^{-\lambda} \right) \quad (n-k \rightarrow \infty) \quad (2.0.12)$$

für ein $\lambda > 1$.

Beweis: Der Beweis für Theorem 2.6 wird in Abschnitt 7.3 erbracht. □

Definition 2.5.

Ein stochastischer Prozess $\{W_\Sigma(t)\}_{t \geq 0} := \{(W^{(1)}(t), \dots, W^{(p)}(t))\}_{t \geq 0}$ mit P -f.s. stetigen Pfaden heißt p -dimensionaler Wiener-Prozess mit Kovarianzmatrix Σ , wenn

$$\mathbb{E} W_\Sigma(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

und die endlichdimensionalen Verteilungen von W_Σ Gauß-verteilt sind mit

$$\mathbb{E} W_\Sigma^{(i)}(t) W_\Sigma^{(j)}(s) = \sigma_{ij} \min(t, s) \quad \forall t, s \geq 0, 1 \leq i, j \leq p,$$

wobei $\Sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$.

2 Invarianzprinzipien

Bemerkung 2.3. In den Aussagen der vorangegangenen Theoreme 2.1-2.6 kann die Partialsumme $\sum_{i=1}^n Y_i$ durch einen Wiener-Prozess ersetzt werden, d.h. es gelten die folgenden Aussagen.

In Theorem 2.1:

Es gibt einen p -dimensionalen Wiener-Prozess $\{W_A(t)\}_{t \geq 0}$, so dass gilt:

$$\left\| \sum_{i=1}^{[t]} X_i - W_A(t) \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o(G^{-1}(t)) \quad (t \rightarrow \infty).$$

In Theorem 2.2:

Es gibt einen p -dimensionalen Wiener-Prozess $\{W_A(t)\}_{t \geq 0}$, so dass gilt:

$$\left\| \sum_{i=1}^{[t]} X_i - W_A(t) \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} \mathcal{O}(\log t) \quad (t \rightarrow \infty).$$

In Theorem 2.3:

Es gibt einen p -dimensionalen Wiener-Prozess $\{W_A(t)\}_{t \geq 0}$, so dass gilt:

$$\left\| \sum_{i=1}^{[t]} X_i - W_A(t) \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o(t^{\frac{1}{2}-\lambda}) \quad (t \rightarrow \infty).$$

In Theorem 2.4 sowie in Theorem 2.6:

Es gibt einen p -dimensionalen Wiener-Prozess $\{W_A(t)\}_{t \geq 0}$, so dass gilt:

$$\left\| \sum_{i=1}^{[t]} X_i - W_A(t) \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o(t^{\frac{1}{2}}(\log t)^{-\lambda}) \quad (t \rightarrow \infty)$$

bzw. für jedes $T > 0$ gibt es einen p -dimensionalen Wiener-Prozess $\{W_A^{\{T\}}(t)\}_{t \geq 0}$, so dass gilt:

$$\left\| \sum_{i=[t]+1}^{[T]} X_i - W_A^{\{T\}}(T-t) \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o((T-t)^{\frac{1}{2}}(\log(T-t))^{-\lambda}) \quad (T-t \rightarrow \infty).$$

In Theorem 2.5:

Es gibt einen p -dimensionalen Wiener-Prozess $\{W_A(t)\}_{t \geq 0}$, so dass gilt:

$$\left\| \sum_{i=1}^{[t]} X_i - W_A(t) \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o(t^{\frac{1}{2}-\lambda}) \quad (t \rightarrow \infty)$$

bzw. für jedes $T > 0$ gibt es einen p -dimensionalen Wiener-Prozess $\{W_A^{\{T\}}(t)\}_{t \geq 0}$, so dass gilt:

$$\left\| \sum_{i=[t]+1}^{[T]} X_i - W_A^{\{T\}}(T-t) \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o((T-t)^{\frac{1}{2}-\lambda}) \quad (T-t \rightarrow \infty).$$

2 Invarianzprinzipien

Beweis: Mit Theorem 1.2.1 aus [CsRé81] folgt für einen (eindimensionalen) Wiener-Prozess $\{W(t)\}_{t \geq 0}$:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |W(t) - W([t])| \stackrel{P-f.s.}{=} \mathcal{O}\left((\log T)^{\frac{1}{2}}\right) \quad (T \rightarrow \infty).$$

Damit erhalten wir unmittelbar die obigen Aussagen. \square

Hat man eine Partialsumme von Zufallsvektoren durch eine Partialsumme unabhängig identisch $N(0, \Sigma)$ verteilter Zufallsvektoren (bzw. durch einen Wiener-Prozess) unter Verwendung von Invarianzprinzipien approximiert, so lassen sich weitere asymptotische Aussagen herleiten. Hat man beispielsweise die Partialsumme einer vorliegenden Folge $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ von Zufallsvektoren wie in Theorem 2.6 durch eine Partialsumme von i.i.d. normalverteilten Zufallsvektoren mit einer Rate von $o(n^{\frac{1}{2}})$ (P -f.s.) approximiert, so erhält man über den Satz vom Iterierten Logarithmus für Zufallsvektoren (vgl. z.B. Korollar 6 in [Ein87a]):

$$\left\| \sum_{i=1}^n X_i \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} \mathcal{O}\left((n \log \log n)^{\frac{1}{2}}\right) \quad \text{bzw.} \quad \max_{1 \leq k \leq n} \frac{\left\| \sum_{i=1}^k X_i \right\|}{(k \log \log k)^{\frac{1}{2}}} = \mathcal{O}_P(1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Ein wichtiges Ziel unserer Analysen zur a posteriori Changepoint-Analyse ist die Bestimmung der asymptotischen Verteilung der betrachteten Teststatistiken. Dazu approximiert man die jeweilige Teststatistik mittels Invarianzprinzipien durch Partialsummen von unabhängig identisch normalverteilten Zufallsvektoren bzw. einen Wiener-Prozess oder einen verwandten stochastischen Prozess. Für diese gibt es Aussagen über ihre asymptotische Verteilung. Damit sind Rückschlüsse auf das asymptotische Verhalten der Teststatistik möglich.

In Kapitel 3 wenden wir folgendes Theorem an, das von Horváth in [Hor93] hergeleitet wird. Dieses Theorem stellt eine Verallgemeinerung der Ergebnisse von Darling und Erdős ([DaEr56]) dar.

Theorem 2.7. *Sei $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängig identisch verteilter zentrierter p -dimensionaler Zufallsvektoren. Weiter gelte:*

$$\text{Cov}(Z_i, Z_j) = I_p,$$

$$\mathbb{E} \|Z_i\|^{2+\delta} < \infty, \exists \delta > 0.$$

Dann folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(a(\log n) \max_{1 \leq k \leq n} k^{-\frac{1}{2}} \left\| \sum_{i=1}^k Z_i \right\| \leq t + d_p(\log n) \right) = \exp(-\exp(-t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dabei sei

$$\begin{aligned} a(n) &:= (2 \log n)^{\frac{1}{2}}, \\ d_p(n) &:= 2 \log n + \frac{p}{2} \log \log n - \log \Gamma\left(\frac{p}{2}\right), \end{aligned}$$

wobei Γ die Gammafunktion bezeichnet.

Zum Beweis von Theorem 2.7 benötigen wir das folgende Theorem.

Theorem 2.8.

$$\text{Sei } N(t) = N_p(t) := \left(\sum_{i=1}^p U_i^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (t \geq 0),$$

wobei $\{U_1(t)\}_{t \geq 0}, \dots, \{U_p(t)\}_{t \geq 0}$ unabhängige, identisch verteilte Ornstein-Uhlenbeck Prozesse sind, d.h. die $\{U_i(t)\}_{t \geq 0}$ sind unabhängige zentrierte Gauß-Prozesse mit P-f.s. stetigen Pfaden und

$$E(U_i(t)U_i(s)) = \exp(-|t - s|) \quad (1 \leq i \leq p).$$

Dann gilt:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P \left(a(T) \sup_{0 \leq x \leq T} N(x) \leq t + d_p(T) \right) = \exp(-\exp(-t)) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

wobei a, d_p wie in Theorem 2.7 definiert sind.

Beweis: Den Beweis von Theorem 2.8 findet man in [Hor93] (Lemma 2.1.) bzw. in [CsHo97] (Theorem A.3.2). \square

Beweis: (von Theorem 2.7)

Der Beweis orientiert sich am Beweis zu Lemma 2.2 in [Hor93]. Sei o.B.d.A. $\delta \leq 1$.

$$\text{Sei für } 1 \leq i \leq p, t \geq 1 : \quad S_i(t) := \sum_{j=1}^{[t]} Z_j^{(i)}.$$

Aus Bemerkung 2.1 folgt mit Bemerkung 2.3:

Es gibt p unabhängige Wiener-Prozesse

$$\{W_1(t)\}_{t \geq 0}, \dots, \{W_p(t)\}_{t \geq 0},$$

so dass gilt:

$$\max_{1 \leq i \leq p} \sup_{1 \leq t \leq n} \frac{|S_i(t) - W_i(t)|}{t^{\frac{1}{2+\delta}}} \stackrel{P-f.s.}{=} o(1) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (2.0.13)$$

Weiter gilt:

$$\left\{ \left(\sum_{i=1}^p \left(t^{-\frac{1}{2}} W_i(t) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, 1 \leq t < \infty \right\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \{N(\log t), 1 \leq t < \infty\}, \quad (2.0.14)$$

wobei

$$N(t) := \left(\sum_{i=1}^p U_i^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (t \geq 0)$$

und

$$\{U_1(t)\}_{t \geq 0}, \dots, \{U_p(t)\}_{t \geq 0}$$

2 Invarianzprinzipien

unabhängige identisch verteilte Ornstein-Uhlenbeck Prozesse sind.

Aus (2.0.13) folgt mit dem Satz vom Iterierten Logarithmus:

$$\begin{aligned}
 & \sup_{\log n \leq t \leq n} \left| \left(\sum_{i=1}^p \left(t^{-\frac{1}{2}} S_i(t) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{i=1}^p \left(t^{-\frac{1}{2}} W_i(t) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| \\
 & \stackrel{(2.0.13) \text{ } P\text{-f.s.}}{=} \sup_{\log n \leq t \leq n} \left| \left(\sum_{i=1}^p \left(t^{-\frac{1}{2}} W_i(t) + o\left(t^{-\frac{\delta}{2(2+\delta)}}\right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{i=1}^p \left(t^{-\frac{1}{2}} W_i(t) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| \\
 & \stackrel{S.v. \text{ } Iter. \text{ } Log.}{=} o_P \left((\log \log n)^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \tag{2.0.15}
 \end{aligned}$$

Mit dem Satz vom Iterierten Logarithmus erhalten wir darüber hinaus:

$$\sup_{1 \leq t \leq \log n} t^{-\frac{1}{2}} S_i(t) = \mathcal{O}_P \left((\log \log \log n)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (n \rightarrow \infty), \tag{2.0.16}$$

$$\sup_{1 \leq t \leq \log n} t^{-\frac{1}{2}} W_i(t) = \mathcal{O}_P \left((\log \log \log n)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \tag{2.0.17}$$

Aus (2.0.16) folgt:

$$a(\log n) \sup_{1 \leq t \leq \log n} \left| \left(\sum_{i=1}^p \left(t^{-\frac{1}{2}} S_i(t) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| - d_p(\log n) \xrightarrow{P} -\infty \quad (n \rightarrow \infty) \tag{2.0.18}$$

und analog mit (2.0.17):

$$a(\log n) \sup_{1 \leq t \leq \log n} \left| \left(\sum_{i=1}^p \left(t^{-\frac{1}{2}} W_i(t) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| - d_p(\log n) \xrightarrow{P} -\infty \quad (n \rightarrow \infty). \tag{2.0.19}$$

Aus (2.0.14), (2.0.15), (2.0.18), (2.0.19) folgt mit Theorem 2.8 die Behauptung. \square

Zur Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von gewichteten Teststatistiken verwendet man das folgende analoge Resultat.

Theorem 2.9. *Sei $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängig identisch verteilter zentrierter p -dimensionaler Zufallsvektoren. Weiter gelte für $i \in \mathbb{N}$:*

$$\text{Cov } Z_i = I_p,$$

$$\mathbb{E} \|Z_i\|^{2+\delta} < \infty, \exists \delta > 0.$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(a(\log n) \max_{1 \leq k < n} \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_{i=1}^k Z_i - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n Z_i \right\| \leq t + d_p(\log n) \right) \\
 & = \exp(-2 \exp(-t)) \quad \forall t \in \mathbb{R},
 \end{aligned}$$

wobei a, d_p wie in Theorem 2.7 definiert sind.

2 Invarianzprinzipien

Beweis: Der Beweis verläuft ähnlich wie der Beweis zu Theorem 2.7. Im Unterschied dazu sind hier zwei Wiener-Prozesse zur Approximation des Partialsummenprozesses notwendig (vgl. auch Bew. zu Theorem A.4.2. in [CsHo97]).

Sei o.B.d.A. $\delta \leq 1$.

Sei für $1 \leq i \leq p, t \geq 1$:

$$S_i(t) := \sum_{j=1}^{[t]} Z_j^{(i)},$$

$$S_i^*(t) = S_i^{*(n)}(t) := \sum_{j=[t+1]}^n Z_j^{(i)}.$$

Aus Bemerkung 2.1 folgt mit Bemerkung 2.3: Es gibt p unabhängige Wiener-Prozesse

$$\left\{ W_1^{(1)}(t) \right\}_{t \geq 0}, \dots, \left\{ W_p^{(1)}(t) \right\}_{t \geq 0},$$

so dass gilt:

$$\max_{1 \leq i \leq p} \sup_{1 \leq t \leq \frac{n}{2}} \frac{|S_i(t) - W_i^{(1)}(t)|}{t^{\frac{1}{2+\delta}}} \stackrel{P-f.s.}{=} o(1) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (2.0.20)$$

und es gibt für jedes $n \in \mathbb{N}$ unabhängige (auch von den oben definierten p Wiener-Prozessen unabhängige) Wiener-Prozesse

$$\left\{ W_1^{(2,n)}(t) \right\}_{t \geq 0}, \dots, \left\{ W_p^{(2,n)}(t) \right\}_{t \geq 0},$$

so dass gilt:

$$\max_{1 \leq i \leq p} \sup_{1 \leq t \leq \frac{n}{2}} \frac{|S_i^*(t) - W_i^{(2,n)}(n-t)|}{(n-t)^{\frac{1}{2+\delta}}} \stackrel{P-f.s.}{=} o(1) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (2.0.21)$$

Sei

$$B_{i,n}(s) := \begin{cases} n^{-\frac{1}{2}} \left(W_i^{(1)}(ns) - \left(W_i^{(1)}\left(\frac{n}{2}\right) + W_i^{(2,n)}\left(\frac{n}{2}\right) \right) \right) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ n^{-\frac{1}{2}} \left(-W_i^{(2,n)}(n - ns) + (1-s) \left(W_i^{(1)}\left(\frac{n}{2}\right) + W_i^{(2,n)}\left(\frac{n}{2}\right) \right) \right) & \frac{1}{2} < s \leq 1. \end{cases}$$

Dann ist $B_{i,n}$ eine Brownsche Brücke.

Es gilt:

$$\left\{ \left(\sum_{i=1}^p \left((s(1-s))^{-\frac{1}{2}} B_{i,n}(s) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mid 0 < s < 1 \right\}$$

$$\stackrel{\mathcal{D}}{=} \left\{ N \left(\log \frac{s}{1-s} \right), 0 < s < 1 \right\}, \quad (2.0.22)$$

2 Invarianzprinzipien

wobei $N(t)$ wie in Theorem 2.8 definiert ist.

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
& \sup_{\log n \leq t \leq \frac{n}{2}} \left| \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{n}{t(n-t)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(S_i(t) - \frac{t}{n} S_i(n) \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
& \quad \left. - \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{1}{\frac{t}{n}(1-\frac{t}{n})} \right)^{\frac{1}{2}} B_{i,n} \left(\frac{t}{n} \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| \\
& = \sup_{\log n \leq t \leq \frac{n}{2}} \left| \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{n}{t(n-t)} \right)^{\frac{1}{2}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left(S_i(t) - \frac{t}{n} \left(S_i \left(\frac{n}{2} \right) + S_i^* \left(\frac{n}{2} \right) \right) \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad \left. - \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{1}{\frac{t}{n}(1-\frac{t}{n})} \right)^{\frac{1}{2}} B_{i,n} \left(\frac{t}{n} \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| \\
& \stackrel{(2.0.20), (2.0.21) \text{ } P-f.s.}{=} \sup_{\log n \leq t \leq \frac{n}{2}} \left| \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{n}{t(n-t)} \right)^{\frac{1}{2}} \right. \right. \\
& \quad \left(W_i^{(1)}(t) - \frac{t}{n} \left(W_i^{(1)} \left(\frac{n}{2} \right) + W_i^{(2,n)} \left(\frac{n}{2} \right) \right) \right) \\
& \quad \left. \left. + o \left(t^{-\frac{\delta}{2(2+\delta)}} \left(\frac{n}{n-t} \right)^{\frac{1}{2}} + n^{-\frac{\delta}{2(2+\delta)}} \left(\frac{t}{n-t} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad \left. - \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{1}{\frac{t}{n}(1-\frac{t}{n})} \right)^{\frac{1}{2}} B_{i,n} \left(\frac{t}{n} \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| \\
& \stackrel{S.v. Iter. Log.}{=} o_P \left((\log \log n)^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (n \rightarrow \infty) \tag{2.0.23}
\end{aligned}$$

und analog:

$$\begin{aligned}
& \sup_{\frac{n}{2} < t \leq n - \log n} \left| \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{n}{t(n-t)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(S_i(t) - \frac{t}{n} S_i(n) \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
& \quad \left. - \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{1}{\frac{t}{n}(1-\frac{t}{n})} \right)^{\frac{1}{2}} B_{i,n} \left(\frac{t}{n} \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right|
\end{aligned}$$

2 Invarianzprinzipien

$$\begin{aligned}
&= \sup_{\frac{n}{2} < t \leq n - \log n} \left| \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{n}{t(n-t)} \right)^{\frac{1}{2}} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(-S_i^*(t) + \frac{n-t}{n} \left(S_i \left(\frac{n}{2} \right) + S_i^* \left(\frac{n}{2} \right) \right) \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left. - \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{1}{\frac{t}{n}(1-\frac{t}{n})} \right)^{\frac{1}{2}} B_{i,n} \left(\frac{t}{n} \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| \\
&\stackrel{(2.0.20), (2.0.21) \text{ } P\text{-}f.s.}{=} \sup_{\frac{n}{2} < t \leq n - \log n} \left| \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{n}{t(n-t)} \right)^{\frac{1}{2}} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(-W_i^{(2,n)}(n-t) + \frac{n-t}{n} \left(W_i^{(1)} \left(\frac{n}{2} \right) + W_i^{(2,n)} \left(\frac{n}{2} \right) \right) \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + o \left((n-t)^{-\frac{\delta}{2(2+\delta)}} \left(\frac{n}{t} \right)^{\frac{1}{2}} + n^{-\frac{\delta}{2(2+\delta)}} \left(\frac{n-t}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left. - \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{1}{\frac{t}{n}(1-\frac{t}{n})} \right)^{\frac{1}{2}} B_{i,n} \left(\frac{t}{n} \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| \\
&\stackrel{S.v. \text{ } Iter. \text{ } Log.}{=} o_P \left((\log \log n)^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \tag{2.0.24}
\end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
&\sup_{1 \leq t \leq \log n} \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{n}{t(n-t)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(S_i(t) - \frac{t}{n} S_i(n) \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sup_{1 \leq t \leq \log n} \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{n}{n-t} \right)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} S_i(t) - \left(\left(\frac{t}{n-t} \right)^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} S_i(n) \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\stackrel{S.v. \text{ } Iter. \text{ } Log.}{=} \mathcal{O}_P \left((\log \log \log n)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \tag{2.0.25}
\end{aligned}$$

Analog folgt, wiederum mit dem Satz vom Iterierten Logarithmus:

$$\begin{aligned}
&\sup_{n - \log n \leq t < n} \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{n}{t(n-t)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(S_i(t) - \frac{t}{n} S_i(n) \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \mathcal{O}_P \left((\log \log \log n)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (n \rightarrow \infty) \tag{2.0.26}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \sup_{1 \leq t \leq \log n} \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{n}{t(n-t)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(B_{i,n} \left(\frac{t}{n} \right) \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \mathcal{O}_P \left((\log \log \log n)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (2.0.27)$$

sowie

$$\begin{aligned} & \sup_{n - \log n \leq t < n} \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{n}{t(n-t)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(B_{i,n} \left(\frac{t}{n} \right) \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \mathcal{O}_P \left((\log \log \log n)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (2.0.28)$$

Aus (2.0.22)-(2.0.28) folgt analog wie im Beweis zu Theorem 2.7 mit Theorem 2.8 die Behauptung. \square

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

3.1 Einführung

Die a posteriori Changepoint-Analyse beschäftigt sich mit der Fragestellung, ob in einem abgeschlossenen Zeitraum der Vergangenheit ein Strukturbruch in gesammelten Beobachtungen festgestellt werden kann. Speziell betrachten wir in diesem Kapitel Changepoint-Modelle für abrupte Changepoints. Zu dieser Art der Changepoint-Analyse gibt es bereits zahlreiche Untersuchungen. Einen Überblick geben Csörgő und Horváth in [CsHo97].

In Abschnitt 3.2 übertragen wir eine bekannte Teststatistik, die sogenannte "Union-Intersection" Teststatistik, die bisher für lineare Modelle mit unabhängigen Fehlertermen untersucht worden ist, auf den Fall korrelierter Fehler. Der Union-Intersection Test testet in linearen Modellen auf eine Veränderung des Regressionsvektors, der festlegt, mit welchem Gewicht die einzelnen Einflussgrößen in die Zielgröße eingehen.

Eine weitere Teststatistik zur Changepoint-Analyse in linearen Modellen, die auf Partialsummen von Residuen beruht, betrachten wir in Abschnitt 3.3. Anders als in Abschnitt 3.2 wird hier überprüft, ob ein plötzlicher Strukturbruch im Fehlerprozess des linearen Modells auftritt.

In Abschnitt 3.4 werden neue Teststatistiken zur a posteriori Changepoint-Analyse in State-Space Modellen konzipiert und theoretisch untersucht.

Hauptziel unserer Untersuchungen ist es, das asymptotische Verhalten der betrachteten Teststatistiken zu bestimmen. Darüber hinaus werden Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints vorgestellt sowie Schätzer für weitere Parameter, insbesondere die i.A. unbekannte Varianz der Fehlerprozesse. Bei unbekannter Varianz der Fehlerprozesse spielt die Bestimmung von asymptotisch "guten" Varianzschätzern eine entscheidende Rolle für das Verhalten der Teststatistiken, da diese zur Normierung der Teststatistiken verwendet werden.

Zentrales Hilfsmittel für unsere Untersuchungen sind Invarianzprinzipien, wie sie in Kapitel 2 vorgestellt worden sind.

3.2 A posteriori Changepoint-Analyse in linearen Modellen für abrupte Changepoints im Regressionsvektor mit dem Union-Intersection Test

Ziel der Untersuchungen dieses Abschnitts ist es, die Union-Intersection Teststatistik auf lineare Modelle mit korrelierten Fehlertermen zu übertragen.

3.2.1 Modell

Wir stellen zunächst das Modell vor, das wir im gesamten Abschnitt 3.2 betrachten:

$$y_i := \begin{cases} x_i' \beta + \varepsilon_i, & 1 \leq i \leq k^*, \\ x_i' \beta^* + \varepsilon_i, & k^* < i \leq n. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

β, β^* sind zu schätzende p -dimensionale reelle Vektoren mit $\beta \neq \beta^*$.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ sind Zufallsvariablen, die den Fehlerprozess beschreiben.

k^* ist der Zeitpunkt des Changepoints.

$x_i := (x_{i,1}, \dots, x_{i,p})'$ sind p -dimensionale Zufallsvektoren, die Einflussgrößen zum Zeitpunkt i beschreiben. Die x_i unterliegen zufälligen Schwankungen, d.h. $\forall i \in \mathbb{N}$ gibt es einen deterministischen Vektor $\tilde{x}_i := (\tilde{x}_{i,1}, \dots, \tilde{x}_{i,p})' \in \mathbb{R}^p$ und einen p -dimensionalen Zufallsvektor η_i , so dass gilt:

$$x_i = \tilde{x}_i + \eta_i.$$

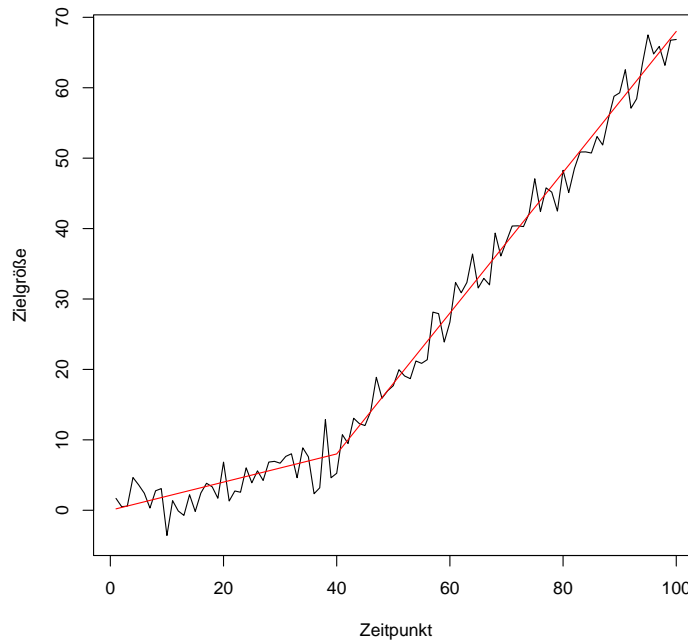


Abbildung 5: Abrupter Changepoint im Regressionsvektor β zum Zeitpunkt 40.

Getestet wird die Hypothese

$$H_0 : k^* = n$$

gegen die Alternative

$$H_A : 1 \leq k^* < n.$$

An den Fehlerprozess $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ stellen wir in diesem Abschnitt stets die folgenden Mindestforderungen:

$$\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ ist stationär im Sinne von Definition 2.1,} \quad (3.2.2)$$

$$\mathbb{E} \varepsilon_i = 0, 0 < \sigma^2 := \text{Var}(\varepsilon_i) (< \infty), \quad (3.2.3)$$

$$\exists 0 < \delta < 1: \max_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{E} |\varepsilon_i|^{2+\delta} < \text{const}_6 \text{ für eine Konstante } \text{const}_6. \quad (3.2.4)$$

Zur Herleitung asymptotischer Aussagen benötigen wir darüber hinaus Charakterisierungen der "Stärke" der Korrelation. Dies wird über eine Mischungsbedingung an den Fehlerprozess realisiert. Als zentral stellt sich dabei die folgende Bedingung heraus:

$$\beta(k) \leq \text{const}_3 \left(k^{-(1+\varepsilon)(1+\frac{2}{\delta})} \right) \forall k \in \mathbb{N} \text{ für ein } 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (3.2.5)$$

wobei $\beta(k)$ der in Definition 2.3 erklärte Mischungskoeffizient für die absolute Regularität des Fehlerprozesses $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ist.

Für $\{\eta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ fordern wir folgende Eigenschaften:

$$\{\eta_i\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ Folge unabhängiger Zufallsvektoren,} \quad (3.2.6)$$

$$\mathbb{E} \eta_i = 0 \forall i \in \mathbb{N}, \quad (3.2.7)$$

$$\max_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \|\eta_i\|^{2+\delta} < \text{const}_7 \text{ für eine Konstante } \text{const}_7, \quad (3.2.8)$$

$$\{\eta_i\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ unabhängig von } \{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}. \quad (3.2.9)$$

Bemerkung 3.1. Sei $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine stark mischende stationäre Folge von Zufallsvariablen mit gleichmäßig beschränkten Momenten der Ordnung $2+\delta$, $\delta > 0$. Für den Mischungskoeffizienten α gelte:

$$\alpha(k) \leq \text{const}_8 \left(k^{-(1+\varepsilon)(1+\frac{2}{\delta})} \right) \forall k \in \mathbb{N} \text{ für ein } 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Dann folgt für die Autokovarianzfunktion $\gamma(h) := \text{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_{1+h})$:

$$\gamma(h) \leq 10 \left(\text{const}_8 h^{-(1+\varepsilon)(1+\frac{2}{\delta})} \right)^{\frac{\delta}{2+\delta}} \|\varepsilon_i\|_{2+\delta} \|\varepsilon_{i+h}\|_{2+\delta} = \mathcal{O}(h^{-(1+\varepsilon)}) \quad (h \rightarrow \infty).$$

Beweis: Folgt mit Lemma 7.11. □

Eine wichtige Rolle bei der asymptotischen Untersuchung der betrachteten Teststatistik spielt die Wahl geeigneter Schätzer der i.A. unbekannten Kovarianzmatrix der Teststatistik. Diese Schätzer werden zur Normierung der Teststatistik benötigt. Um durch den Fehler, der bei der Schätzung der Kovarianzmatrix gemacht wird, keine Verschlechterung

des asymptotischen Verhaltens der Teststatistik zu erhalten, stellen wir zusätzliche Bedingungen an den Fehlerprozess $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Wir betrachten dazu lineare Fehlerprozesse der folgenden Gestalt:

$$\varepsilon_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \tilde{\varepsilon}_{i-j}, \quad a_j \in \mathbb{R}, \quad (3.2.10)$$

$$\begin{aligned} &\{\tilde{\varepsilon}_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \text{ i.i.d., zentriert mit } 0 < \tau^2 := \mathbb{E} \tilde{\varepsilon}_1^2, \\ &\exists 0 < \delta < 1 : \mathbb{E} |\tilde{\varepsilon}_1|^{2+\delta} =: \text{const}_9, \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k |a_k| < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \neq 0. \quad (3.2.12)$$

Bemerkung 3.2. $\sum_{k=0}^{\infty} k |a_k| < \infty$ ist insbesondere erfüllt, falls gilt:

$$a_k = \mathcal{O}(k^{-\beta}) \quad (k \rightarrow \infty) \text{ mit } \beta > 2.$$

Bemerkung 3.3. Aus (3.2.10)-(3.2.12) erhält man unter Verwendung des Satzes von Beppo Levi und des Satzes von Lebesgue:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \varepsilon_i = 0, \\ &\sigma^2 := \text{Var } \varepsilon_i = \tau^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < \infty, \\ &\mathbb{E} |\varepsilon_i|^{2+\delta} \leq \text{const}_9 \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^{2+\delta} =: \text{const}_{10}, \\ &\gamma(h) := \text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+h}) = \mathbb{E} \left(\sum_{j_1=0}^{\infty} a_{j_1} \tilde{\varepsilon}_{i-j_1} \sum_{j_2=-h}^{\infty} a_{j_2+h} \tilde{\varepsilon}_{i-j_2} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j a_{j+h} \tau^2. \end{aligned}$$

Das heißt insbesondere, dass aus (3.2.10)-(3.2.12) die Gültigkeit der Bedingungen (3.2.2)-(3.2.4) folgt.

Bemerkung 3.4. Gelte (3.2.5)-(3.2.12). Dann folgt mit Bemerkung 3.1 und Bemerkung 3.3:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j a_{j+h} = \mathcal{O}(h^{-(1+\varepsilon)}) \quad (h \rightarrow \infty).$$

Wir betrachten ein Beispiel, für das die oben beschriebenen Bedingungen (3.2.10)-(3.2.12) (und damit nach Bemerkung 3.3 auch (3.2.2)-(3.2.4)) erfüllt sind.

Beispiel 3.1. Sei $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ ein $\text{ARMA}(p, q)$ -Prozess mit Fehlerprozess $\{\tilde{\varepsilon}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ i.i.d., $\mathbb{E} \tilde{\varepsilon}_1 = 0$, $\text{Var } \tilde{\varepsilon}_1 = \sigma^2$, $\mathbb{E} |\tilde{\varepsilon}_1|^{2+\delta} < \infty$:

$$Y_i = \phi_1 Y_{i-1} + \dots + \phi_p Y_{i-p} + \tilde{\varepsilon}_i + \theta_1 \tilde{\varepsilon}_{i-1} + \dots + \theta_q \tilde{\varepsilon}_{i-q}.$$

In abgekürzter Schreibweise:

$$\phi(B)Y_i = \theta(B)\tilde{\varepsilon}_i,$$

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

wobei B der "backward shift" Operator:

$$B^j Y_i := Y_{i-j},$$

$$\phi(z) := 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p,$$

$$\theta(z) := 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q.$$

Es gelte, dass $\phi(B)$ und $\theta(B)$ keine gemeinsamen Nullstellen besitzen, und dass $\phi(z) \neq 0$ für alle $|z| \leq 1, z \in \mathbb{C}$.

Das heißt, $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ ist kausal und läßt sich darstellen als:

$$Y_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \tilde{\varepsilon}_{i-j},$$

wobei

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j = \frac{\theta(z)}{\phi(z)}, |z| \leq 1$$

(vgl. Theorem 3.1 in [BrDa87]).

Unter den obigen Voraussetzungen ist die Mischungsbedingung (3.2.5) erfüllt, denn:

Mit Theorem 4.4.2 aus [BrDa91] folgt:

$\{Y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ hat die Spektraldichte

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2 |\theta(\exp(-i\lambda))|^2}{2\pi |\phi(\exp(-i\lambda))|^2}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi.$$

Mit Theorem 4 aus [IbSo69] folgt damit:

$$\beta(k) = \mathcal{O}(k^{-r}) \quad (k \rightarrow \infty) \quad \forall r \in \mathbb{R},$$

wobei $\beta(k)$ der Mischungskoeffizient aus Definition 2.3 für $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ist.

(3.2.12) ist z.B. erfüllt, falls $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ ein kausaler $AR(1)$ -Prozess ist, d.h. $\theta \equiv 1$, $\phi(z) = 1 - \phi_1 z$, denn in diesem Fall gilt:

$$a_j = \phi_1^j.$$

Hieraus erhalten wir:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j^k = \frac{1}{1 - \phi_1^k} < \infty \quad \forall k > 0$$

und damit durch Vergleich mit der harmonischen Reihe:

$$a_j = o(j^{-k}) \quad (j \rightarrow \infty) \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

Weiter gilt:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \frac{1}{\phi(1)} \neq 0.$$

3.2.2 Ergebnisse

In diesem Abschnitt stellen wir die wichtigsten Ergebnisse von Abschnitt 3.2 vor. Zur Vereinfachung der Notation führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$X_k := \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times p}, \quad X_k^* := \begin{pmatrix} x'_{k+1} \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-k) \times p}, \quad X_{i,j} := \begin{pmatrix} x'_i \\ \vdots \\ x'_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(j-i+1) \times p},$$

$$\tilde{X}_k := \begin{pmatrix} \tilde{x}'_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}'_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times p}, \quad \tilde{X}_k^* := \begin{pmatrix} \tilde{x}'_{k+1} \\ \vdots \\ \tilde{x}'_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-k) \times p}, \quad \tilde{X}_{i,j} := \begin{pmatrix} \tilde{x}'_i \\ \vdots \\ \tilde{x}'_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(j-i+1) \times p},$$

$$Y_k := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k, \quad Y_k^* := \begin{pmatrix} y_{k+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-k)}, \quad Y_{i,j} := \begin{pmatrix} y_i \\ \vdots \\ y_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(j-i+1)},$$

$$\xi_k := \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k, \quad \xi_k^* := \begin{pmatrix} \varepsilon_{k+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-k)}, \quad \xi_{i,j} := \begin{pmatrix} \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(j-i+1)}.$$

Für $p \leq k \leq n - p$ definieren wir:

$$H_k := (X'_k X_k)^{-1} + (X_k^{*'} X_k^*)^{-1},$$

$$\mathcal{H}_k := \frac{n}{k(n-k)} H_k^{-1} \left(\frac{1}{n} X'_n X_n \gamma(0) + \sum_{h=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{n-h} X'_{1,n-h} X_{h+1,n} \gamma(h) \right)^{-1} H_k^{-1}.$$

Im Weiteren benötigen wir folgende Regularitätsbedingungen:

$$\text{Rang}(X_k) = p \quad \forall p \leq k \leq n, \quad (3.2.13)$$

$$\text{Rang}(X_k^*) = p \quad \forall 1 \leq k \leq n - p, \quad (3.2.14)$$

Es gibt eine positiv definite Matrix A ,
eine Folge positiver definiter Matrizen $\{A_h\}_{h \in \mathbb{N}}$

und ein $\vartheta > 11 + \frac{192}{\varepsilon \delta}$, so dass gilt:

$$\left\| \frac{1}{k} X'_k X_k - A \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o((\log k)^{-\vartheta}) \quad (k \rightarrow \infty), \quad (3.2.15)$$

$$\left\| \frac{1}{n-k} X_k^{*'} X_k^* - A \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o((\log(n-k))^{-\vartheta}) \quad (n-k \rightarrow \infty), \quad (3.2.16)$$

$$\max_{h \in \mathbb{N}} \left\| \frac{1}{k} X'_k X_{h+1, k+h} - A_h \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o\left((\log(k))^{-\vartheta}\right) \quad (k \rightarrow \infty), \quad (3.2.17)$$

$$\max_{h \leq k} \left\| \frac{1}{n-k} X'_{k+1-h, n-h} X_{k+1, n} - A_h \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o\left((\log(n-k))^{-\vartheta}\right) \quad (n-k \rightarrow \infty). \quad (3.2.18)$$

$$\tilde{A} := A\gamma(0) + 2 \sum_{h=1}^{\infty} A_h \gamma(h) \text{ ist positiv definit.} \quad (3.2.19)$$

Es gibt eine Konstante const_{11} , so dass gilt:

$$\max_{1 \leq j \leq p, i \in \mathbb{N}} |x_{i,j}| \stackrel{P-f.s.}{\leq} \text{const}_{11}. \quad (3.2.20)$$

$$\left\| \frac{1}{k^* - k} X'_{k, k^*} X_{k, k^*} - A \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o\left((\log(k^* - k))^{-\vartheta}\right) \quad (k^* - k \rightarrow \infty), \quad (3.2.21)$$

$$\left\| \frac{1}{k - k^*} X'_{k^*+1, k} X_{k^*+1, k} - A \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o\left((\log(k - k^*))^{-\vartheta}\right) \quad (k - k^* \rightarrow \infty). \quad (3.2.22)$$

Bemerkung 3.5. Die obigen Regularitätsbedingungen besagen, dass sich die Matrizen X_k, X_k^* asymptotisch in gewisser Weise stabilisieren. In X_k bzw. X_k^* sind alle Einflussgrößen bis zum Zeitpunkt k bzw. ab dem Zeitpunkt $k+1$ enthalten. Bezogen auf die in Kapitel 1 vorgestellten Marktanteilsmodelle heißt dies, dass die Preise von Telekom und Wettbewerbern sich auf einem bestimmten Niveau einpendeln.

Bemerkung 3.6. Aus (3.2.20) folgt insbesondere (3.2.8).

Bemerkung 3.7. Für $1 \leq j \leq p$ gilt:

$$\text{Var} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \eta_i^{(j)} \right) \stackrel{\text{S. v. Lebesgue}, (3.2.15), (3.2.20)}{=} \text{Var} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_{i,j} \right) o\left((\log k)^{-\vartheta}\right) \quad (k \rightarrow \infty).$$

Mit Lemma 7.8 erhalten wir daraus:

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \eta_i^{(j)} = o_P\left((\log k)^{-\frac{\vartheta}{2}}\right) \quad (k \rightarrow \infty).$$

Wir betrachten in diesem Abschnitt die folgende Teststatistik:

$$T_1(n) := \max_{p \leq k \leq n-p} \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right)' \mathcal{H}_k \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right)$$

bzw.

$$T_1^*(n) := \max_{p \leq k \leq n-p} \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right)' \hat{\mathcal{H}}_k \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right),$$

wobei

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_k &:= (X'_k X_k)^{-1} X'_k Y_k, \quad p \leq k \leq n-p, \\ \hat{\beta}_k^* &:= (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} X_k^{*'} Y_k^*, \quad p \leq k \leq n-p, \\ \hat{\mathcal{H}}_k &\text{ Schätzer für } \mathcal{H}_k, \quad p \leq k \leq n-p. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.8. Die Teststatistik T_1 bzw. T_1^* wird als Union-Intersection Teststatistik bezeichnet. Wir wollen kurz die Herkunft dieser Bezeichnung erklären. Hat man ein Testproblem mit Nullhypothese H_0 und Alternative H_A gegeben, so kann es hilfreich sein, die Nullhypothese als Schnitt ("Intersection") von "einfacheren" Nullhypothesen und die Alternative entsprechend als Vereinigung ("Union") von "einfachen" Alternativen umzuformulieren. Diese Vorgehensweise wird häufig verwendet, um ein mehrdimensionales Testproblem auf eindimensionale Testprobleme zu reduzieren und wird zuerst von Roy in [Roy53] angewendet (vgl. auch [Roy57], [RoGnSr71]: Kapitel 4, [OlTo81]).

Wir stellen eine kurze Überlegung an, unser oben definiertes Testproblem auf die beschriebene Weise umzuformulieren. Ersetzen wir im Modell (3.2.1) k^* durch k ($p \leq k \leq n - p$), so erhalten wir folgende $n - 2p - 1$ Modelle:

$$y_i := \begin{cases} x'_i \beta_k + \varepsilon_i, & p \leq i \leq k, \\ x'_i \beta_k^* + \varepsilon_i, & k < i \leq n - p. \end{cases}$$

β_k, β_k^* ersetzen dabei jeweils β, β^* aus (3.2.1).

Für $1 \leq j \leq p$ können wir folgendes Testproblem definieren:

$$\begin{aligned} H_0^{(j)} : \beta_k^{(j)} &= \beta_k^{*(j)} \quad \forall p \leq k \leq n - p, \\ H_A^{(j)} : \beta_k^{(j)} &\neq \beta_k^{*(j)} \quad \exists p \leq k \leq n - p, \end{aligned}$$

wobei $\beta_k^{(j)}$ bzw. $\beta_k^{*(j)}$ der j -ten Komponente des Vektors β_k bzw. β_k^* entspricht.

Das Ausgangstestproblem können wir (unter der Voraussetzung $p \leq k^* \leq n - p$) wie folgt umformulieren:

$$\begin{aligned} H_0 &: \cap_{1 \leq j \leq p} H_0^{(j)}, \\ H_A &: \cup_{1 \leq j \leq p} H_A^{(j)}. \end{aligned}$$

Eine naheliegende Teststatistik zum Test von $H_0^{(j)}$ gegen $H_A^{(j)}$ ($1 \leq j \leq p$) ist:

$$\max_{p \leq k \leq n-p} \left(\text{Var} \left(\hat{\beta}_k^{(j)} - \hat{\beta}_k^{*(j)} \right) \right)^{-1} \left(\hat{\beta}_k^{(j)} - \hat{\beta}_k^{*(j)} \right)^2.$$

Als Teststatistik zum Test von H_0 gegen H_A leiten wir daraus ab:

$$\max_{p \leq k \leq n-p} \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right)' \left(\text{Cov} \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right) \right)^{-1} \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right).$$

$\left(\text{Cov} \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right) \right)^{-1}$ wird in T_1 bzw. T_1^* durch \mathcal{H}_k bzw. $\hat{\mathcal{H}}_k$ approximiert (vgl. Lemma 3.3, Beweis zu Lemma 3.7).

Eine ähnliche Teststatistik wird von Hawkins in [Haw89] zur Changepoint-Analyse in linearen Modellen angewendet. Horváth und Shao in [HoSh95] sowie Csörgő und Horváth in [CsHo97] untersuchen diese Teststatistik weitergehend. Die dort durchgeführten Untersuchungen beschränken sich auf den Fall unabhängig identisch verteilter Fehlerterme $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Bemerkung 3.9. $X_k^*, Y_k^*, \xi_k^*, H_k, \mathcal{H}_k$ und damit auch alle daraus abgeleiteten Größen, wie z.B. β_k^* , sind abhängig von n . Wir müssen also genauer von einem doppelt indizierten Schema ausgehen. Wenn keine Mißverständnisse zu erwarten sind, verwenden wir jedoch die obigen Bezeichner ohne doppelte Indizierung.

3.2.2.1 Asymptotisches Verhalten des Union-Intersection Test

Das erste Theorem beschreibt das asymptotische Verhalten der Teststatistik T_1 für den Fall der Nullhypothese.

Theorem 3.1. *Gelte H_0 , (3.2.2)-(3.2.9) sowie (3.2.13)-(3.2.20). Dann folgt:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(a(\log n) T_1(n)^{\frac{1}{2}} \leq t + d_p(\log n) \right) = \exp(-2 \exp(-t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dabei seien a, d_p wie in Theorem 2.7 definiert.

Beweis: S. Abschnitt 3.2.4. □

Bemerkung 3.10. *In Theorem 3.1 erhält man die doppelte Exponentialverteilung als Grenzverteilung. Der Grund hierfür ist, dass die Terme*

$$\max_{p \leq k \leq \frac{n}{\log n}} \left| \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right)' \mathcal{H}_k \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right) \right|,$$

$$\max_{\frac{n}{\log n} \leq k \leq n-p} \left| \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right)' \mathcal{H}_k \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right) \right|$$

für $n \rightarrow \infty$ jeweils durch eine einfache Exponentialverteilung approximiert werden und asymptotisch unabhängig voneinander sind (vgl. Lemma 3.7 sowie Beweis zu Theorem 3.1).

Sei $\dot{\delta} := \beta - \beta^*$. Dann gilt das folgende Theorem, das die Konsistenz der Teststatistik T_1 unter der Alternative sicherstellt.

Theorem 3.2. *Gelte H_A , (3.2.2)-(3.2.9) sowie (3.2.13)-(3.2.20). Weiter gelte:*

$$\min(k^*, n - k^*) \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty), \tag{3.2.23}$$

$$\frac{k^*(n - k^*) \dot{\delta}' \dot{\delta}}{n \log \log n} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty). \tag{3.2.24}$$

Dann folgt:

$$\frac{T_1(n)}{\log \log n} \xrightarrow{P} \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

Beweis: S. Abschnitt 3.2.4. □

3.2.2.2 Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints

Neben Aussagen über die Existenz eines Changepoints spielt für praktische Anwendungen auch dessen Zeitpunkt eine wichtige Rolle. Ist der Zeitpunkt eines Changepoints bekannt, so kann eine Ursachenforschung angestoßen werden. Darüber hinaus spielen Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints eine entscheidende Rolle bei der Konzeption geeigneter Schätzer für \mathcal{H}_k (vgl. Abschnitt 3.2.6).

$$\text{Sei } \hat{k} := \inf \left\{ k \mid (\beta_k - \beta_k^*)' H_k^{-1} (\beta_k - \beta_k^*) = \max_{p \leq k \leq n-p} (\beta_k - \beta_k^*)' H_k^{-1} (\beta_k - \beta_k^*) \right\}.$$

Dann gilt das folgende Theorem.

Theorem 3.3. *Es gelte H_A , (3.2.2)-(3.2.9) sowie (3.2.13)-(3.2.24). Weiter gelte:*

$$k^* = \lfloor n\tau \rfloor \text{ für ein } 0 < \tau < 1. \quad (3.2.25)$$

Dann folgt:

$$\frac{|\hat{k} - k^*|}{n} = o_P(1) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.2.26)$$

Beweis: S. Abschnitt 3.2.5. □

3.2.2.3 Schätzer für \mathcal{H}_k

Für die Bestimmung von \mathcal{H}_k wird die i.A. unbekannte Autokovarianzfunktion von $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ benötigt. Aus diesem Grund ersetzen wir \mathcal{H}_k durch einen geeigneten Schätzer $\hat{\mathcal{H}}_k$, in den Schätzer für die Autokovarianzfunktion einfließen. So erhalten wir aus der Teststatistik T_1 die Teststatistik T_1^* .

Ziel ist die Konstruktion von Schätzern, die die asymptotischen Aussagen von Theorem 3.1 bzw. Theorem 3.2 nicht verändern, wenn man \mathcal{H}_k durch $\hat{\mathcal{H}}_k$ ersetzt.

Bemerkung 3.11.

$$\text{Gilt } \max_{p \leq k \leq n-p} \frac{n}{k(n-k)} \left\| \hat{\mathcal{H}}_k - \mathcal{H}_k \right\| = o_P \left(\frac{1}{(\log \log n)^2} \right) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.2.27)$$

so kann man T_1 in Theorem 3.1 durch T_1^* ersetzen.

Beweis: In Bemerkung 3.14 wird gezeigt, dass unter den Voraussetzungen von Theorem 3.1 gilt:

$$\max_{p \leq k \leq n-p} \left(\frac{k(n-k)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right\| = \mathcal{O}_P((\log \log n)^{\frac{1}{2}}) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.2.28)$$

Aus (3.2.27), (3.2.28) folgt

$$|T_1(n) - T_1^*(n)| = \mathcal{O}_P((\log \log n)^{-1}) \quad (n \rightarrow \infty)$$

und damit die Behauptung. □

Bemerkung 3.12.

$$\text{Gilt } \frac{n}{k^*(n-k^*)} \left\| \hat{\mathcal{H}}_{k^*} - \mathcal{H}_{k^*} \right\| = o_P(1) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.2.29)$$

so kann man T_1 in Theorem 3.2 durch T_1^* ersetzen.

Beweis: Vgl. Beweis zu Theorem 3.2 in Abschnitt 3.2.4. □

Bemerkung 3.13. *In Abschnitt 3.2.6 stellen wir Schätzer für \mathcal{H}_k vor, für die (3.2.27) unter H_0 bzw. (3.2.29) unter H_A erfüllt sind.*

3.2.3 Vorbereitungen

In diesem Abschnitt leiten wir einige vorbereitende Lemmata her. Die Vorgehensweise und die Beweisstruktur einiger Lemmata orientieren sich dabei an den Ausführungen von Horváth und Shao in [HoSh95].

In den beiden folgenden Lemmata stellen wir einfache Folgerungen aus den Bedingungen (3.2.2)-(3.2.5), (3.2.13)-(3.2.20) zusammen.

Lemma 3.1. *Seien die Bedingungen (3.2.13)-(3.2.16) erfüllt. Sei weiter $f_1, f_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i \uparrow \infty$, $p \leq f_i(n) \leq n$ ($i = 1, 2$). Dann gilt:*

$$\left\| k (X'_k X_k)^{-1} - A^{-1} \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o((\log k)^{-\vartheta}) \quad (k \rightarrow \infty), \quad (3.2.30)$$

$$\left\| (n-k) (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} - A^{-1} \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o((\log(n-k))^{-\vartheta}) \quad (n-k \rightarrow \infty), \quad (3.2.31)$$

$$\max_{p \leq k \leq n-p} \left\| k (X'_k X_k)^{-1} \right\| = \mathcal{O}_P(1) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.2.32)$$

$$\max_{p \leq k \leq n-p} \left\| (n-k) (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} \right\| = \mathcal{O}_P(1) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.2.33)$$

$$\max_{p \leq k \leq n-p} \left\| \frac{n}{k(n-k)} H_k^{-1} \right\| = \mathcal{O}_P(1) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.2.34)$$

$$\max_{f_1(n) \leq k \leq n-p} \left\| k (X'_k X_k)^{-1} - A^{-1} \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o((\log f_1(n))^{-\vartheta}) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.2.35)$$

$$\max_{p \leq k \leq n-f_2(n)} \left\| (n-k) (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} - A^{-1} \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o((\log f_2(n))^{-\vartheta}) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.2.36)$$

$$\max_{p \leq k \leq \frac{n}{2}} \left\| (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} (X'_n X_n) - \frac{n}{n-k} I_p \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o((\log n)^{-\vartheta}) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.2.37)$$

$$\max_{\frac{n}{2} \leq k \leq n-p} \left\| (X'_k X_k)^{-1} (X'_n X_n) - \frac{n}{k} I_p \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o((\log n)^{-\vartheta}) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.2.38)$$

$$\max_{f_1(n) \leq k \leq n-f_2(n)} \left\| \frac{n}{k(n-k)} H_k^{-1} - A \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o(\log(f_1(n)^{-\vartheta}) + \log(f_2(n)^{-\vartheta})) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.2.39)$$

Beweis: (3.2.30) und (3.2.31) folgen aus (3.2.15) bzw. (3.2.16) mit Lemma 7.6. (3.2.32)-(3.2.34) folgen aus (3.2.15) und (3.2.16) mit Lemma 7.6 und Lemma 7.7. (3.2.35), (3.2.36) folgen aus (3.2.30) bzw. (3.2.31).

Zu (3.2.37):

$$\begin{aligned} & \max_{p \leq k \leq \frac{n}{2}} \left\| (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} (X'_n X_n) - \frac{n}{n-k} I_p \right\| \\ &= \max_{p \leq k \leq \frac{n}{2}} \left\| \frac{n}{n-k} (n-k) (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} \frac{1}{n} (X'_n X_n) - \frac{n}{n-k} I_p \right\| \\ & \stackrel{(3.2.15), (3.2.36) \text{ } P-f.s.}{\leq} \max_{p \leq k \leq \frac{n}{2}} \left\| \frac{n}{n-k} \left(A^{-1} + o((\log n)^{-\vartheta}) \right) \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\| (A + o((\log n)^{-\vartheta})) - \frac{n}{n-k} I_p \right\| \\ & \stackrel{P-f.s.}{=} o((\log n)^{-\vartheta}) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

(3.2.38) folgt analog mit (3.2.15) und (3.2.35).

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{k(n-k)}{n} H_k - A^{-1} \right\| \\ & = \left\| \frac{n-k}{n} k (X'_k X_k)^{-1} + \frac{k}{n} (n-k) (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} - A^{-1} \right\| \\ & \stackrel{(3.2.30), (3.2.31) P-f.s.}{=} o((\log k)^{-\vartheta} + (\log(n-k))^{-\vartheta}) \\ & \quad \text{für } \min(k, n-k) \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{3.2.40}$$

Aus (3.2.40) folgt mit Lemma 7.6:

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{n}{k(n-k)} H_k^{-1} - A \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o((\log k)^{-\vartheta} + (\log(n-k))^{-\vartheta}) \\ & \quad \text{für } \min(k, n-k) \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{3.2.41}$$

Aus (3.2.41) folgt (3.2.39). \square

Lemma 3.2. *Seien die Bedingungen (3.2.2)-(3.2.5), (3.2.13)-(3.2.20) erfüllt. Sei weiter $f_1, f_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i \uparrow \infty$, $p \leq f_i(n) \leq n$ ($i = 1, 2$). Dann gilt:*

$$\max_{f_1(n) \leq k \leq n-f_2(n)} \left\| \frac{n}{k(n-k)} \mathcal{H}_k - A \tilde{A}^{-1} A \right\| \tag{3.2.42}$$

$$\stackrel{P-f.s.}{=} o((\log f_1(n))^{-\vartheta} + (\log(f_2(n)))^{-\vartheta}) \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$\max_{p \leq k \leq n-p} \left\| \frac{n}{k(n-k)} \mathcal{H}_k \right\| = \mathcal{O}_P(1) \quad (n \rightarrow \infty). \tag{3.2.43}$$

Beweis:

$$\max_{1 \leq h \leq \frac{n}{2}} \left\| A_h - \frac{1}{n-h} X'_{1,n-h} X_{h+1,n} \right\| \stackrel{(3.2.17) P-f.s.}{=} o((\log n)^{-\vartheta}) \quad (n \rightarrow \infty). \tag{3.2.44}$$

(3.2.42) folgt mit Lemma 7.6, (3.2.15), (3.2.39), (3.2.44), Bemerkung 3.1.

Analog zu (3.2.42) folgt:

$$\max_{p \leq k \leq n-p} \left\| \frac{n}{k(n-k)} \mathcal{H}_k - A \tilde{A}^{-1} A \right\| = \mathcal{O}_P(1) \quad (n \rightarrow \infty). \tag{3.2.45}$$

Aus (3.2.45) folgt (3.2.43). \square

Lemma 3.3. *Seien die Voraussetzungen (3.2.2)-(3.2.9), (3.2.13)-(3.2.20) erfüllt. Dann gilt für $\min(k_1, k_2 - k_1) \rightarrow \infty$:*

$$\text{Cov}(X'_{k_1+1, k_2+1} \xi_{k_1+1, k_2+1}) = (k_2 - k_1) \tilde{A} + o(k_2 (\log k_2)^{-\vartheta}). \tag{3.2.46}$$

Beweis: Aus (3.2.15), (3.2.16) folgt für $\min(k_1, k_2 - k_1) \rightarrow \infty$:

$$\|X'_{k_1+1, k_2} X_{k_1+1, k_2} - (k_2 - k_1) A\| \stackrel{P-f.s.}{=} o\left(k_2 (\log k_2)^{-\vartheta}\right) \quad (3.2.47)$$

und aus (3.2.17), (3.2.18) für $\min(k_1, k_2 - k_1) \rightarrow \infty$:

$$\max_{h \in \mathbb{N}} \|X'_{k_1+1, k_2} X_{k_1+h+1, k_2+h} - (k_2 - k_1) A_h\| \stackrel{P-f.s.}{=} o\left(k_2 (\log k_2)^{-\vartheta}\right). \quad (3.2.48)$$

Sei $\Gamma^{(k_1, k_2)} = \left(\gamma_{\ell_1, \ell_2}^{(k_1, k_2)}\right)_{1 \leq \ell_1, \ell_2 \leq p} := \text{Cov}\left(X'_{k_1+1, k_2} \xi_{k_1+1, k_2}\right)$.

Es gilt:

$$X'_{k_1+1, k_2} \xi_{k_1+1, k_2} = \begin{pmatrix} \sum_{i=k_1+1}^{k_2} x_{i,1} \varepsilon_i \\ \vdots \\ \sum_{i=k_1+1}^{k_2} x_{i,p} \varepsilon_i \end{pmatrix}$$

und damit für $\min(k_1, k_2 - k_1) \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} & \gamma_{\ell_1, \ell_2}^{(k_1, k_2)} \\ &= \text{Cov} \left(\sum_{i=k_1+1}^{k_2} x_{i, \ell_1} \varepsilon_i, \sum_{i=k_1+1}^{k_2} x_{i, \ell_2} \varepsilon_i \right) \\ & \stackrel{(3.2.6)-(3.2.9)}{=} \sum_{i=k_1+1}^{k_2} \tilde{x}_{i, \ell_1} \tilde{x}_{i, \ell_2} \gamma(0) \\ & \quad + \sum_{h=1}^{k_2-k_1} \sum_{i=1}^{k_2-k_1-h} \tilde{x}_{i, \ell_1} \tilde{x}_{i+h, \ell_2} \gamma(h) \\ & \quad + \sum_{h=1}^{k_2-k_1} \sum_{i=1}^{k_2-k_1-h} \tilde{x}_{i+h, \ell_1} \tilde{x}_{i, \ell_2} \gamma(h) + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} \text{Cov} \left(\eta_i^{(\ell_1)}, \eta_i^{(\ell_2)} \right) \gamma(0) \\ &= \sum_{i=k_1+1}^{k_2} \tilde{x}_{i, \ell_1} \tilde{x}_{i, \ell_2} \gamma(0) + \sum_{h=1}^{k_2-k_1} \sum_{i=k_1+1}^{k_2} \tilde{x}_{i, \ell_1} \tilde{x}_{i+h, \ell_2} \gamma(h) \\ & \quad + \sum_{h=1}^{k_2-k_1} \sum_{i=k_1+1}^{k_2} \tilde{x}_{i+h, \ell_1} \tilde{x}_{i, \ell_2} \gamma(h) \\ & \quad - \sum_{h=1}^{k_2-k_1} \sum_{i=k_2-k_1-h+1}^{k_2-k_1} \tilde{x}_{i, \ell_1} \tilde{x}_{i+h, \ell_2} \gamma(h) \\ & \quad - \sum_{h=1}^{k_2-k_1} \sum_{i=k_2-k_1-h+1}^{k_2-k_1} \tilde{x}_{i+h, \ell_1} \tilde{x}_{i, \ell_2} \gamma(h) + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} \text{Cov} \left(\eta_i^{(\ell_1)}, \eta_i^{(\ell_2)} \right) \gamma(0) \\ & \stackrel{\text{Bem. 3.1}, (3.2.20) \text{ } P-f.s.}{=} \sum_{i=k_1+1}^{k_2} \tilde{x}_{i, \ell_1} \tilde{x}_{i, \ell_2} \gamma(0) + \sum_{h=1}^{k_2-k_1} \sum_{i=k_1+1}^{k_2} \tilde{x}_{i, \ell_1} \tilde{x}_{i+h, \ell_2} \gamma(h) \end{aligned}$$

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

$$\begin{aligned}
& + \sum_{h=1}^{k_2-k_1} \sum_{i=k_1+1}^{k_2} \tilde{x}_{i+h,\ell_1} \tilde{x}_{i,\ell_2} \gamma(h) + \mathcal{O} \left(\sum_{h=1}^{k_2-k_1} h^{-\varepsilon} \right) \\
& + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} \text{Cov} \left(\eta_i^{(\ell_1)}, \eta_i^{(\ell_2)} \right) \gamma(0) \\
\stackrel{P-f.s.}{=} & \sum_{i=k_1+1}^{k_2} \tilde{x}_{i,\ell_1} \tilde{x}_{i,\ell_2} \gamma(0) + \sum_{h=1}^{k_2-k_1} \sum_{i=k_1+1}^{k_2} \tilde{x}_{i,\ell_1} \tilde{x}_{i+h,\ell_2} \gamma(h) \\
& + \sum_{h=1}^{k_2-k_1} \sum_{i=k_1+1}^{k_2} \tilde{x}_{i+h,\ell_1} \tilde{x}_{i,\ell_2} \gamma(h) \\
& + o \left(k_2 (\log k_2)^{-\vartheta} \right) + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} \text{Cov} \left(\eta_i^{(\ell_1)}, \eta_i^{(\ell_2)} \right) \gamma(0). \tag{3.2.49}
\end{aligned}$$

Sei für $1 \leq i \leq n$:

$$C_i := \left(\text{Cov} \left(\eta_i^{(\ell_1)}, \eta_i^{(\ell_2)} \right) \right)_{1 \leq \ell_1, \ell_2 \leq p} \in \mathbb{R}^{p \times p}.$$

Wir erhalten für $\min(k_1, k_2 - k_1) \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
& \tilde{X}'_{k_1+1,k_2} \tilde{X}_{k_1+1,k_2} + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} C_i \\
\stackrel{(3.2.6)-(3.2.8)}{=} & \mathbb{E} \left(X'_{k_1+1,k_2} X_{k_1+1,k_2} \right) \\
\stackrel{S.v. Lebesgue, (3.2.20), (3.2.47)}{=} & (k_2 - k_1) A + o \left(k_2 (\log k_2)^{-\vartheta} \right), \tag{3.2.50}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{X}'_{k_1+1,k_2} \tilde{X}_{k_1+h+1,k_2+h} \\
\stackrel{(3.2.6)-(3.2.8)}{=} & \mathbb{E} \left(X'_{k_1+1,k_2} X_{k_1+h+1,k_2+h} \right) \\
\stackrel{S.v. Lebesgue, (3.2.20), (3.2.48)}{=} & (k_2 - k_1) A_h + o \left(k_2 (\log k_2)^{-\vartheta} \right). \tag{3.2.51}
\end{aligned}$$

Damit gilt für $\min(k_1, k_2 - k_1) \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(3.2.49)}{=} \Gamma(k_1, k_2) \left(\tilde{X}'_{k_1+1,k_2} \tilde{X}_{k_1+1,k_2} + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} C_i \right) \gamma(0) \\
& + 2 \sum_{h=1}^{k_2-k_1} \tilde{X}'_{k_1+1,k_2} \tilde{X}_{k_1+h+1,k_2+h} \gamma(h) + o \left(k_2 (\log k_2)^{-\vartheta} \right) \\
\stackrel{(3.2.20), (3.2.50), (3.2.51), \text{Bem. 3.1}}{=} & (k_2 - k_1) \tilde{A} + o \left(k_2 (\log k_2)^{-\vartheta} \right).
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.4. Sei $p \geq 1$, $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge nicht negativer reeller Zahlen. Dann gilt:

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right)^p \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^p.$$

Beweis: Jensensche Ungleichung. □

Aus Theorem 2.6 erhalten wir mit Lemma 3.3 Invarianzprinzipien für die Partialsummen $X'_k \xi_k$ bzw. $X_k^{*'} \xi_k^*$.

Korollar 3.1. Gelte (3.2.2)-(3.2.9) sowie (3.2.13)-(3.2.20). Dann gibt es eine Folge i.i.d. normalverteilter zentrierter Zufallsvektoren $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\text{Cov } Y_1 = \tilde{A}$, so dass gilt:

$$\left\| X'_n \xi_n - \sum_{i=1}^n Y_i \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o\left(n^{\frac{1}{2}} (\log n)^{-\lambda}\right) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.2.52)$$

und es gibt für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge i.i.d. normalverteilter zentrierter Zufallsvektoren $\{Y_i^{\{n\}}\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\text{Cov } Y_1^{\{n\}} = \tilde{A}$, so dass gilt:

$$\left\| X_k^{*'} \xi_k^* - \sum_{i=k+1}^n Y_i^{\{n\}} \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o\left((n-k)^{\frac{1}{2}} (\log(n-k))^{-\lambda}\right) \quad (n-k \rightarrow \infty) \quad (3.2.53)$$

für ein $\lambda > 1$.

Beweis:

$$\text{Sei für } i \in \mathbb{N}: Z_i := x_i \varepsilon_i = \begin{pmatrix} x_{i,1} \varepsilon_i \\ \vdots \\ x_{i,p} \varepsilon_i \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ absolut regulär und für den Mischungskoeffizienten β von $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ gilt:

$$\beta(k) \leq \text{const}_3 \left(k^{-(1+\varepsilon)(1+\frac{2}{\delta})} \right) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.2.54)$$

Sei A_{k_1, k_2} die Kovarianzmatrix von $\sum_{i=k_1+1}^{k_2} Z_i$.

Mit Lemma 3.3 folgt für $\min(k_1, k_2 - k_1) \rightarrow \infty$:

$$\left\| \frac{1}{k_2 - k_1} A_{k_1, k_2} - \tilde{A} \right\| = o\left(\frac{k_2}{k_2 - k_1} (\log k_2)^{-\vartheta}\right). \quad (3.2.55)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \max_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \|Z_i\|^{2+\delta} &= \max_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left(\left(\sum_{j=1}^p |x_{i,j}|^2 \right)^{\frac{2+\delta}{2}} |\varepsilon_i|^{2+\delta} \right) \\ &\stackrel{(3.2.4), (3.2.20)}{\leq} \text{const}_{12} \quad \text{für eine Konstante } \text{const}_{12}. \end{aligned} \quad (3.2.56)$$

Analog folgt:

$$\max_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \|Z_i\|^2 \stackrel{(3.2.3), (3.2.20)}{\leq} \text{const}_{13} \quad \text{für eine Konstante } \text{const}_{13}. \quad (3.2.57)$$

Sei $\tilde{\delta} \geq 0$. Unter Verwendung von Lemma 3.4 erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbb{E} \|Z_i\|^2)^{\frac{3+\tilde{\delta}}{2+\tilde{\delta}}} \\ & \stackrel{\text{Lemma 3.4}}{\geq} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \|Z_i\|^2 \right)^{\frac{3+\tilde{\delta}}{2+\tilde{\delta}}} \\ & \stackrel{(3.2.6), (3.2.7), (3.2.9)}{=} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \left(\tilde{x}_{i,j}^2 + \text{Var } \eta_i^{(j)} \right) \mathbb{E} \varepsilon_i^2 \right)^{\frac{3+\tilde{\delta}}{2+\tilde{\delta}}} \\ & \stackrel{(3.2.3), (3.2.15), \text{Bem. 3.7}}{=} \left(\left(\text{Sp}(A) \sigma^2 + o \left((\log n)^{-\frac{\vartheta}{2}} \right) \right) \right)^{\frac{3+\tilde{\delta}}{2+\tilde{\delta}}} \quad (n \rightarrow \infty) \\ & \stackrel{\text{Apos. def.}}{\geq} \text{const}_{14} \end{aligned} \quad (3.2.58)$$

für eine Konstante $\text{const}_{14} > 0$ für n hinreichend groß.

Aus (3.2.57) und (3.2.58) folgt:

$$\max_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \|Z_i\|^2 \leq \frac{\text{const}_{13}}{\text{const}_{14}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbb{E} \|Z_i\|^2)^{\frac{3+\tilde{\delta}}{2+\tilde{\delta}}} \quad (\text{für } n \text{ hinreichend groß}). \quad (3.2.59)$$

Damit sind die Voraussetzungen von Theorem 2.6 für die Folge $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ erfüllt, und wir erhalten (3.2.52) sowie (3.2.53). \square

Korollar 3.2. *Gelte (3.2.2)-(3.2.9) sowie (3.2.13)-(3.2.20). Dann folgt:*

$$\begin{aligned} \|X'_k \xi_k\| & \stackrel{P-f.s.}{\leq} \text{const}_{15} (k \log \log k)^{\frac{1}{2}} \quad (k \rightarrow \infty), \\ \|X_k^{*'} \xi_k^*\| & \stackrel{P-f.s.}{\leq} \text{const}_{16} ((n-k) \log \log (n-k))^{\frac{1}{2}} \quad (n-k \rightarrow \infty), \\ \max_{p \leq k \leq n-p} \left\| (k \log \log k)^{-\frac{1}{2}} X'_k \xi_k \right\| & = \mathcal{O}_P(1) \quad (n \rightarrow \infty), \\ \max_{p \leq k \leq n-p} \left\| ((n-k) \log \log (n-k))^{-\frac{1}{2}} X_k^{*'} \xi_k^* \right\| & = \mathcal{O}_P(1) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Beweis: Folgt aus Korollar 3.1 mit dem Satz vom Iterierten Logarithmus für unabhängige Zufallsvektoren. \square

Bemerkung 3.14. Gelte (3.2.2)-(3.2.9) sowie (3.2.13)-(3.2.20). Dann folgt:

$$\begin{aligned}
 & \max_{p \leq k \leq n-p} \left(\frac{k(n-k)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right\| \\
 &= \max_{p \leq k \leq n-p} \left(\frac{k(n-k)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| (X'_k X_k)^{-1} X'_k \xi_k - (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} X_k^{*'} \xi_k^* \right\| \\
 &\stackrel{\text{Korollar 3.2, (3.2.32), (3.2.33)}}{=} \mathcal{O}_P \left((\log \log n)^{\frac{1}{2}} \right).
 \end{aligned}$$

Lemma 3.5. Es gelte H_0 . Weiter seien die Regularitätsbedingungen (3.2.13) und (3.2.14) erfüllt. Dann folgt:

$$\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* = (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} (X'_n X_n) \left((X'_k X_k)^{-1} X'_k \xi_k - (X'_n X_n)^{-1} X'_n \xi_n \right), \quad (3.2.60)$$

$$\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* = (X'_k X_k)^{-1} (X'_n X_n) \left((X'_n X_n)^{-1} X'_n \xi_n - (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} X_k^{*'} \xi_k^* \right). \quad (3.2.61)$$

Beweis: (vgl. [HoSh95], Lemma 2.2)

$$X'_k X_k + X_k^{*'} X_k^* = X'_n X_n, \quad (3.2.62)$$

$$X'_k X_k \hat{\beta}_k + X_k^{*'} X_k^* \hat{\beta}_k^* = X'_n X_n \hat{\beta}_n, \quad (3.2.63)$$

$$\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_n = (X'_k X_k)^{-1} X'_k \xi_k - (X'_n X_n)^{-1} X'_n \xi_n, \quad (3.2.64)$$

$$\hat{\beta}_n - \hat{\beta}_k^* = (X'_n X_n)^{-1} X'_n \xi_n - (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} X_k^{*'} \xi_k^*. \quad (3.2.65)$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* &= \hat{\beta}_k - (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} (X_k^{*'} X_k^*) \hat{\beta}_k^* \\
 &\stackrel{(3.2.63)}{=} \hat{\beta}_k + (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} (X'_k X_k \hat{\beta}_k - X'_n X_n \hat{\beta}_n) \\
 &= (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} ((X'_k X_k + X_k^{*'} X_k^*) \hat{\beta}_k - X'_n X_n \hat{\beta}_n) \\
 &\stackrel{(3.2.62)}{=} (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} (X'_n X_n \hat{\beta}_k - X'_n X_n \hat{\beta}_n) \\
 &= (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} X'_n X_n (\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_n) \\
 &\stackrel{(3.2.64)}{=} (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} (X'_n X_n) \left((X'_k X_k)^{-1} X'_k \xi_k - (X'_n X_n)^{-1} X'_n \xi_n \right).
 \end{aligned}$$

(3.2.61) erhält man durch eine analoge Rechnung mit (3.2.62), (3.2.63), (3.2.65). \square

$$\begin{aligned}
 \text{Sei } R_{k,1} = R_{k,1}^{(n)} &:= (X'_k X_k)^{-1} X'_k \xi_k - (X'_n X_n)^{-1} X'_n \xi_n, \\
 R_{k,2} = R_{k,2}^{(n)} &:= (X'_n X_n)^{-1} X'_n \xi_n - (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} X_k^{*'} \xi_k^*.
 \end{aligned}$$

Lemma 3.6. Es gelte H_0 , (3.2.2)-(3.2.9) sowie (3.2.13)-(3.2.20). Dann folgt für $n \rightarrow \infty$:

$$\max_{p \leq k \leq \frac{n}{2}} \left(\frac{k(n-k)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* - \frac{n}{n-k} R_{k,1} \right\| = o_P \left(\frac{(\log \log n)^{\frac{1}{2}}}{(\log n)^\vartheta} \right), \quad (3.2.66)$$

$$\max_{\frac{n}{2} \leq k \leq n-p} \left(\frac{k(n-k)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* - \frac{n}{k} R_{k,2} \right\| = o_P \left(\frac{(\log \log n)^{\frac{1}{2}}}{(\log n)^\vartheta} \right). \quad (3.2.67)$$

Beweis: (vgl. [HoSh95], Lemma 2.3.)

Aus Korollar 3.2 folgt mit (3.2.32):

$$\max_{p \leq k \leq n} \|k^{\frac{1}{2}}(X'_k X_k)^{-1} X'_k \xi_k\| = \mathcal{O}_P \left((\log \log n)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.2.68)$$

Aus (3.2.68) erhalten wir:

$$\max_{p \leq k \leq n} k^{\frac{1}{2}} \|R_{k,1}\| = \mathcal{O}_P \left((\log \log n)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.2.69)$$

und damit:

$$\begin{aligned} & \max_{p \leq k \leq \frac{n}{2}} \left(\frac{k(n-k)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* - \frac{n}{n-k} R_{k,1} \right\| \\ \stackrel{(3.2.60)}{=} & \max_{p \leq k \leq \frac{n}{2}} \left(\frac{k(n-k)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \left((X_k^{*'} X_k^*)^{-1} (X'_n X_n) - \frac{n}{n-k} I_p \right) R_{k,1} \right\| \\ \stackrel{(3.2.37) \text{ } P\text{-f.s.}}{=} & o((\log n)^{-\vartheta}) \max_{p \leq k \leq \frac{n}{2}} \left\| \left(\frac{n-k}{n} \right)^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}} R_{k,1} \right\| \\ \stackrel{(3.2.69)}{=} & \mathcal{O}_P \left(\frac{(\log \log n)^{\frac{1}{2}}}{(\log n)^{\vartheta}} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

(3.2.67) erhalten wir analog mit (3.2.32), (3.2.33), (3.2.38), (3.2.61). \square

Das folgende Lemma ist zentral für die Bestimmung der asymptotischen Verteilung der Teststatistik T_1 unter der Nullhypothese.

Lemma 3.7. *Es gelte H_0 , (3.2.2)-(3.2.9) sowie (3.2.13)-(3.2.20).*

Dann folgt für $n \rightarrow \infty$:

$$\max_{p \leq k \leq \log n} \left| \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right)' \mathcal{H}_k \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right) \right| = \mathcal{O}_P (\log \log \log n), \quad (3.2.70)$$

$$\max_{n - \log n \leq k \leq n - p} \left| \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right)' \mathcal{H}_k \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right) \right| = \mathcal{O}_P (\log \log \log n), \quad (3.2.71)$$

$$\max_{\frac{n}{\log n} \leq k \leq n - \frac{n}{\log n}} \left| \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right)' \mathcal{H}_k \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right) \right| = \mathcal{O}_P (\log \log \log n), \quad (3.2.72)$$

$$\max_{\log n \leq k \leq \frac{n}{\log n}} \left| \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right)' \mathcal{H}_k \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right) - \frac{1}{k} \xi_k' X_k \tilde{A}^{-1} X_k' \xi_k \right| \quad (3.2.73)$$

$$= \mathcal{O}_P \left((\log \log n)^{1-\vartheta} \right),$$

$$\max_{n - \frac{n}{\log n} \leq k \leq n - \log n} \left| \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right)' \mathcal{H}_k \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right) - \frac{1}{n-k} \xi_k^{*'} X_k^* \tilde{A}^{-1} X_k^{*'} \xi_k^* \right| \quad (3.2.74)$$

$$= \mathcal{O}_P \left((\log \log n)^{1-\vartheta} \right).$$

Für den Beweis von Lemma 3.7 benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 3.8. Sei $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängig identisch verteilter zentrierter p -dimensionaler Zufallsvektoren. Weiter gelte für $i \in \mathbb{N}$:

$$\text{Cov } Z_i = I_p, \quad \mathbb{E} \|Z_i\|^{2+\delta} < \infty, \quad \exists \delta > 0.$$

Dann folgt für $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \max_{\frac{n}{\log n} \leq k \leq \frac{n}{2}} \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_{i=1}^k Z_i - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n Z_i \right\| &= \mathcal{O}_P \left((\log \log \log n)^{\frac{1}{2}} \right), \\ \max_{\frac{n}{2} \leq k \leq n - \frac{n}{\log n}} \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_{i=1}^k Z_i - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n Z_i \right\| &= \mathcal{O}_P \left((\log \log \log n)^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Beweis: Vgl. z.B. Beweis zu Theorem 4.1.3 in [CsHo97]. \square

Beweis: (von Lemma 3.7) Der Beweis verläuft ähnlich zum Beweis von Lemma 2.4 in [HoSh95]. Alle asymptotischen Aussagen im Beweis von Lemma 3.7 gelten für $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} & \max_{p \leq k \leq \log n} k^{\frac{1}{2}} \|R_{k,1}\| \\ (3.2.32), \text{Korollar 3.2} & \quad \mathcal{O}_P \left((\log \log \log n)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\log n \log \log n}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ & = \mathcal{O}_P \left((\log \log \log n)^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \tag{3.2.75}$$

$$\begin{aligned} & \max_{p \leq k \leq \log n} \left| \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right)' \mathcal{H}_k \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right) \right| \\ & = \max_{p \leq k \leq \log n} \left| \left(\frac{k(n-k)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right)' \frac{n}{k(n-k)} \mathcal{H}_k \right. \\ & \quad \left. \left(\frac{k(n-k)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right) \right| \\ (3.2.43), (3.2.66) & \quad \max_{p \leq k \leq \log n} \left| \left(\frac{k(n-k)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{n}{n-k} \left(R_{k,1} + o_P \left(\frac{(\log \log n)^{\frac{1}{2}}}{(\log n)^\vartheta} \right) \right)' \mathcal{O}_P(1) \right. \\ & \quad \left. \left(\frac{k(n-k)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{n}{n-k} \left(R_{k,1} + o_P \left(\frac{(\log \log n)^{\frac{1}{2}}}{(\log n)^\vartheta} \right) \right) \right| \\ (3.2.75) & \quad \mathcal{O}_P(\log \log \log n). \end{aligned}$$

Damit haben wir (3.2.70) gezeigt.

Analog zu (3.2.75) folgt mit (3.2.32), (3.2.33), Korollar 3.2:

$$\max_{n - \log n \leq k \leq n - p} (n-k)^{\frac{1}{2}} \|R_{k,2}\| = \mathcal{O}_P \left((\log \log \log n)^{\frac{1}{2}} \right). \tag{3.2.76}$$

(3.2.71) erhalten wir analog zum Nachweis von (3.2.70) mit (3.2.43), (3.2.67), (3.2.76).

Wir kommen zum Nachweis von (3.2.72).

$$\begin{aligned}
 & \max_{\frac{n}{\log n} \leq k \leq \frac{n}{2}} k^{\frac{1}{2}} \|R_{k,1}\| \\
 \stackrel{\text{Kor. 3.1, (3.2.30) } P\text{-f.s.}}{=} & \max_{\frac{n}{\log n} \leq k \leq \frac{n}{2}} k^{-\frac{1}{2}} \left\| \left(A^{-1} + o\left(\log(k^{-\vartheta})\right) \right) \left(S(k) + o\left(k^{\frac{1}{2}} (\log k)^{-\lambda}\right) \right) \right. \\
 & \left. - \frac{k}{n} \left(A^{-1} + o\left((\log n)^{-\vartheta}\right) \right) \left(S(n) + o\left(n^{\frac{1}{2}} (\log n)^{-\lambda}\right) \right) \right\| \\
 \stackrel{\text{S.v. Iter. Log.}}{=} & \max_{\frac{n}{\log n} \leq k \leq \frac{n}{2}} k^{-\frac{1}{2}} \left\| A^{-1} \left(S(k) - \frac{k}{n} S(n) \right) \right\| + o_P(1) \\
 \leq & \|A^{-1}\| \|\tilde{A}\| \max_{\frac{n}{\log n} \leq k \leq \frac{n}{2}} k^{-\frac{1}{2}} \left\| \tilde{A}^{-1} \left(S(k) - \frac{k}{n} S(n) \right) \right\| + o_P(1) \\
 \stackrel{\text{Lemma 3.8}}{=} & \mathcal{O}_P\left((\log \log \log n)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{3.2.77}
 \end{aligned}$$

$S(k) := \sum_{i=1}^k Y_i$ ist dabei die Summe von i.i.d. normalverteilten zentrierten Zufallsvektoren mit $\text{Cov } Y_1 = \tilde{A}$.

Analog zum Nachweis von (3.2.70) folgt mit (3.2.43), (3.2.66), (3.2.77):

$$\max_{\frac{n}{\log n} \leq k \leq \frac{n}{2}} \left| \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right)' \mathcal{H}_k \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right) \right| = \mathcal{O}_P(\log \log \log n). \tag{3.2.78}$$

Analog zu (3.2.77) zeigt man:

$$\max_{\frac{n}{2} \leq k \leq n - \frac{n}{\log n}} (n - k)^{\frac{1}{2}} \|R_{k,2}\| = \mathcal{O}_P\left((\log \log \log n)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{3.2.79}$$

Mit (3.2.43), (3.2.67), (3.2.79) folgt analog wie oben:

$$\max_{\frac{n}{2} \leq k \leq n - \frac{n}{\log n}} \left| \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right)' \mathcal{H}_k \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right) \right| = \mathcal{O}_P(\log \log \log n). \tag{3.2.80}$$

Aus (3.2.78) und (3.2.80) erhalten wir (3.2.72).

$$\begin{aligned}
 & \max_{\log n \leq k \leq \frac{n}{\log n}} \left(\frac{k(n-k)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \left((X_k' X_k)^{-1} - \frac{1}{k} A^{-1} \right) X_k' \xi_k \right\| \\
 \leq & \max_{\log n \leq k \leq \frac{n}{\log n}} \left\| \left(k (X_k' X_k)^{-1} - A^{-1} \right) k^{-\frac{1}{2}} X_k' \xi_k \right\| \\
 \stackrel{\text{Korollar 3.2, (3.2.35)}}{=} & o_P\left((\log \log n)^{\frac{1}{2}-\vartheta}\right). \tag{3.2.81}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \max_{\log n \leq k \leq \frac{n}{\log n}} \left(\frac{k(n-k)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* - \frac{1}{k} A^{-1} X_k' \xi_k \right\| \\
 \stackrel{(3.2.81)}{=} & \max_{\log n \leq k \leq \frac{n}{\log n}} \left(\frac{k(n-k)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* - (X_k' X_k)^{-1} X_k' \xi_k \right\| \\
 & + o_P \left((\log \log n)^{\frac{1}{2}-\vartheta} \right) \\
 = & \max_{\log n \leq k \leq \frac{n}{\log n}} \left(\frac{k(n-k)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} X_k^{*'} \xi_k^* \right\| + o_P \left((\log \log n)^{\frac{1}{2}-\vartheta} \right) \\
 \stackrel{(3.2.33), Kor. 3.2}{=} & o_P \left((\log \log n)^{\frac{1}{2}-\vartheta} \right). \tag{3.2.82}
 \end{aligned}$$

Aus Bemerkung 3.14 folgt mit (3.2.42):

$$\begin{aligned}
 & \max_{\log n \leq k \leq \frac{n}{\log n}} \left| (\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^*)' \left(\mathcal{H}_k - \frac{k(n-k)}{n} A \tilde{A}^{-1} A \right) (\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^*) \right| \tag{3.2.83} \\
 = & o_P \left((\log \log n)^{1-\vartheta} \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \max_{\log n \leq k \leq \frac{n}{\log n}} \left| \frac{k(n-k)}{n} (\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^*)' A \tilde{A}^{-1} A (\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^*) \right| \\
 \stackrel{(3.2.82), Kor. 3.2}{=} & \max_{\log n \leq k \leq \frac{n}{\log n}} \left| \frac{k(n-k)}{n} \frac{1}{k} (X_k' \xi_k)' \tilde{A}^{-1} \frac{1}{k} X_k' \xi_k \right| + o_P \left((\log \log n)^{1-\vartheta} \right) \\
 \stackrel{(3.2.85)}{=} & \max_{\log n \leq k \leq \frac{n}{\log n}} \left| \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\log n} \right) \right) \frac{1}{k} \xi_k' X_k \tilde{A}^{-1} X_k' \xi_k \right| + o_P \left((\log \log n)^{1-\vartheta} \right) \\
 \stackrel{Kor. 3.2}{=} & \max_{\log n \leq k \leq \frac{n}{\log n}} \left| \frac{1}{k} \xi_k' X_k \tilde{A}^{-1} X_k' \xi_k \right| + o_P \left((\log \log n)^{1-\vartheta} \right). \tag{3.2.84}
 \end{aligned}$$

Beim Nachweis von (3.2.84) ist zu beachten, dass für $\log n \leq k \leq \frac{n}{\log n}$ gilt:

$$1 \geq \frac{n-k}{n} \geq 1 - \frac{1}{\log n} = 1 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\log n} \right)$$

und damit:

$$\frac{(n-k)}{n} = 1 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\log n} \right). \tag{3.2.85}$$

Aus (3.2.83) und (3.2.84) erhalten wir (3.2.73).

(3.2.74) folgt analog zum Nachweis von (3.2.73). \square

$$\text{Sei } R_k := (X_k' X_k)^{-1} X_k' \xi_k - (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} X_k^{*'} \xi_k^*,$$

$$Q_k := \begin{cases} \dot{\delta} - (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} X_{k+1, k^*}' X_{k+1, k^*} \dot{\delta} & \text{für } 1 \leq k \leq k^*, \\ \dot{\delta} - (X_k' X_k)^{-1} X_{k^*+1, k}' X_{k^*+1, k} \dot{\delta} & \text{für } k^* < k \leq n, \end{cases}$$

$$\text{wobei } \dot{\delta} := \beta - \beta^*.$$

Wir leiten nun zwei Lemmata her, die zentral sind für Aussagen über das asymptotische Verhalten des Zeitpunkts des Changepoints sowie von T_1 bzw. T_1^* für den Fall der Alternative.

Lemma 3.9. *Es gelte H_A , (3.2.2)-(3.2.9), (3.2.13)-(3.2.20), (3.2.23), (3.2.24).*

Dann folgt für $n \rightarrow \infty$:

$$\left| \left(\hat{\beta}_{k^*} - \hat{\beta}_{k^*}^* \right)' H_{k^*}^{-1} \left(\hat{\beta}_{k^*} - \hat{\beta}_{k^*}^* \right) \right| = \frac{k^*(n - k^*)}{n} \Delta + o_P \left(\frac{k^*(n - k^*)}{n} \dot{\delta}' \dot{\delta} \right), \quad (3.2.86)$$

wobei $\Delta := \dot{\delta}' A \dot{\delta}$.

Gilt zusätzlich (3.2.21), (3.2.22), so folgt für alle $\varepsilon > 0$ für $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \max_{p \leq k \leq [k^* - \varepsilon n]} \left| \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right)' H_k^{-1} \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right) \right| &< \left(1 - \frac{\varepsilon n}{k^*} \right) \frac{k^*(n - k^*)}{n} \Delta \\ &+ o_P \left(\frac{k^*(n - k^*)}{n} \dot{\delta}' \dot{\delta} \right), \end{aligned} \quad (3.2.87)$$

$$\begin{aligned} \max_{[k^* + \varepsilon n] \leq k \leq n - p} \left| \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right)' H_k^{-1} \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right) \right| &< \left(1 - \frac{\varepsilon n}{n - k^*} \right) \frac{k^*(n - k^*)}{n} \Delta \\ &+ o_P \left(\frac{k^*(n - k^*)}{n} \dot{\delta}' \dot{\delta} \right). \end{aligned} \quad (3.2.88)$$

Beweis: Alle asymptotischen Aussagen im Beweis von Lemma 3.9 gelten für $n \rightarrow \infty$.

Es gilt für $k^* < k \leq n$:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_k &= (X_k' X_k)^{-1} X_k' Y_k \\ &= (X_k' X_k)^{-1} \left(X_{k^*}^{*'} Y_{k^*} + X_{k^*+1,k}^{*'} Y_{k^*+1,k} \right) \\ &= (X_k' X_k)^{-1} \left(X_{k^*}^{*'} X_{k^*} \beta + X_{k^*+1,k}^{*'} X_{k^*+1,k} \beta^* \right) + (X_k' X_k)^{-1} X_k' \xi_k \\ &= (X_k' X_k)^{-1} \left(X_k' X_k \beta - X_{k^*+1,k}^{*'} X_{k^*+1,k} \beta + X_{k^*+1,k}^{*'} X_{k^*+1,k} \beta^* \right) + (X_k' X_k)^{-1} X_k' \xi_k \\ &= \beta - (X_k' X_k)^{-1} X_{k^*+1,k}^{*'} X_{k^*+1,k} \dot{\delta} + (X_k' X_k)^{-1} X_k' \xi_k, \end{aligned} \quad (3.2.89)$$

$$\hat{\beta}_k^* = \beta^* + (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} X_k^{*'} \xi_k^*. \quad (3.2.90)$$

Analog erhalten wir für $1 \leq k \leq k^*$:

$$\hat{\beta}_k^* = \beta^* + (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} X_{k+1,k^*}^{*'} X_{k+1,k^*} \dot{\delta} + (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} X_k^{*'} \xi_k^*, \quad (3.2.91)$$

$$\hat{\beta}_k = \beta + (X_k' X_k)^{-1} X_k' \xi_k. \quad (3.2.92)$$

Mit (3.2.89)-(3.2.92) folgt:

$$\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* = Q_k + R_k.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} (\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^*)' H_k^{-1} (\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^*) &= Q_k' H_k^{-1} Q_k + R_k' H_k^{-1} Q_k \\ &+ Q_k' H_k^{-1} R_k + R_k' H_k^{-1} R_k. \end{aligned} \quad (3.2.93)$$

$$\max_{p \leq k \leq n} \left(\frac{k(n-k)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \|R_k\| \stackrel{(3.2.32), (3.2.33), \text{Korollar 3.2}}{=} \mathcal{O}_P \left((\log \log n)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (3.2.94)$$

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq k^*} \left(\frac{k(n-k)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \|Q_k\| &= \max_{1 \leq k \leq k^*} \left(\frac{k(n-k)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} X_k^{*'} X_k^* \dot{\delta} \right\| \\ &\stackrel{(3.2.16), (3.2.33)}{=} \mathcal{O}_P \left(\left(\frac{k^*(n-k^*)}{n} \dot{\delta} \right)^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (3.2.95)$$

$$\max_{p \leq k \leq k^*} |Q_k' H_k^{-1} R_k| \stackrel{(3.2.24), (3.2.34), (3.2.94), (3.2.95)}{=} o_P \left(\frac{k^*(n-k^*)}{n} \dot{\delta}' \dot{\delta} \right). \quad (3.2.96)$$

$$\max_{p \leq k \leq n-p} |R_k' H_k^{-1} R_k| \stackrel{(3.2.24), (3.2.34), (3.2.94)}{=} o_P \left(\frac{k^*(n-k^*)}{n} \dot{\delta}' \dot{\delta} \right). \quad (3.2.97)$$

Wegen $Q_{k^*} = \dot{\delta}$ folgt mit (3.2.23), (3.2.39):

$$\begin{aligned} |Q_{k^*}' H_{k^*}^{-1} Q_{k^*}| &\stackrel{P-f.s.}{=} \frac{k^*(n-k^*)}{n} \Delta \\ &+ o \left(\frac{k^*(n-k^*)}{n} \dot{\delta}' \dot{\delta} \left((\log k^*)^{-\vartheta} + (\log(n-k^*))^{-\vartheta} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.2.98)$$

Aus (3.2.93), (3.2.96)-(3.2.98) folgt (3.2.86).

$$\begin{aligned} &\max_{p \leq k \leq \log k^*} |Q_k' H_k^{-1} Q_k| \\ &= \max_{p \leq k \leq \log k^*} \left| \left(\dot{\delta} - (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} X_{k+1, k^*}' X_{k+1, k^*} \dot{\delta} \right)' H_k^{-1} \right. \\ &\quad \left. \left(\dot{\delta} - (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} X_{k+1, k^*}' X_{k+1, k^*} \dot{\delta} \right) \right| \\ &\stackrel{(3.2.20), (3.2.23), (3.2.33), (3.2.34)}{=} o_P \left(\frac{k^*(n-k^*)}{n} \dot{\delta}' \dot{\delta} \right). \end{aligned} \quad (3.2.99)$$

Mit (3.2.16), (3.2.21), (3.2.23), (3.2.36), (3.2.39) erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\max_{\log k^* \leq k \leq [k^* - \varepsilon n]} |Q_k' H_k^{-1} Q_k| \\ &= \max_{\log k^* \leq k \leq [k^* - \varepsilon n]} \left| \left(\left((X_k^{*'} X_k^*)^{-1} X_k^{*'} X_k^* - (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} X_{k+1, k^*}' X_{k+1, k^*} \right) \dot{\delta} \right)' H_k^{-1} \right. \\ &\quad \left. \left(\left((X_k^{*'} X_k^*)^{-1} X_k^{*'} X_k^* - (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} X_{k+1, k^*}' X_{k+1, k^*} \right) \dot{\delta} \right) \right| \\ &\stackrel{P-f.s.}{=} \max_{\log k^* \leq k \leq [k^* - \varepsilon n]} \frac{k(n-k)^2}{n(n-k)} (I_p + o(1)) \dot{\delta}' (A + o(1)) (I_p + o(1)) \dot{\delta} \\ &\stackrel{P-f.s.}{<} \left(1 - \frac{\varepsilon n}{k^*} \right) \frac{k^*(n-k^*)}{n} \Delta + o \left(\frac{k^*(n-k^*)}{n} \dot{\delta}' \dot{\delta} \right). \end{aligned} \quad (3.2.100)$$

Aus (3.2.93) folgt mit (3.2.96)-(3.2.100) (3.2.87).

(3.2.88) erhalten wir analog zu (3.2.87). \square

Lemma 3.10. Sei $\tilde{\Delta} := \dot{\delta}' A \tilde{A}^{-1} A \dot{\delta}$. Es gelte H_A , (3.2.2)-(3.2.9), (3.2.13)-(3.2.20), (3.2.23), (3.2.24). Dann folgt für $n \rightarrow \infty$:

$$(\hat{\beta}_{k^*} - \hat{\beta}_{k^*}^*)' \mathcal{H}_{k^*} (\hat{\beta}_{k^*} - \hat{\beta}_{k^*}^*) = \frac{k^*(n - k^*)}{n} \tilde{\Delta} + o_P \left(\frac{k^*(n - k^*)}{n} \dot{\delta}' \dot{\delta} \right). \quad (3.2.101)$$

Seien zusätzlich $\hat{\mathcal{H}}_k$ ($p \leq k \leq n - p$) Schätzer für \mathcal{H}_k mit

$$\frac{n}{k^*(n - k^*)} \left\| \hat{\mathcal{H}}_{k^*} - \mathcal{H}_{k^*} \right\| = o_P(1) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.2.102)$$

Dann gilt für $n \rightarrow \infty$:

$$(\hat{\beta}_{k^*} - \hat{\beta}_{k^*}^*)' \hat{\mathcal{H}}_{k^*} (\hat{\beta}_{k^*} - \hat{\beta}_{k^*}^*) = \frac{k^*(n - k^*)}{n} \tilde{\Delta} + o_P \left(\frac{k^*(n - k^*)}{n} \dot{\delta}' \dot{\delta} \right). \quad (3.2.103)$$

Beweis: Zum Beweis von (3.2.101) kann man wörtlich den Beweis zu (3.2.86) übernehmen, wenn man H_k^{-1} durch \mathcal{H}_k , Δ durch $\tilde{\Delta}$, A durch $A \tilde{A}^{-1} A$, (3.2.34) durch (3.2.43) und (3.2.39) durch (3.2.42) ersetzt. (3.2.103) folgt analog, wenn man (3.2.102) beachtet. \square

3.2.4 Asymptotisches Verhalten des Union-Intersection Test

Beweis: (von Theorem 3.1, vgl. Beweis zu Theorem 1.1 in [HoSh95])

$$\text{Sei } V_k = V_k(n) := (\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^*)' \mathcal{H}_k (\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^*).$$

Mit Lemma 3.7 folgt für $n \rightarrow \infty$:

$$a(\log n)^2 \max_{p \leq k \leq \log n} V_k - (t + d_p(\log n))^2 \xrightarrow{P} -\infty \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (3.2.104)$$

$$a(\log n)^2 \max_{n - \log n \leq k \leq n - p} V_k - (t + d_p(\log n))^2 \xrightarrow{P} -\infty \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (3.2.105)$$

$$a(\log n)^2 \max_{\frac{n}{\log n} \leq k \leq n - \frac{n}{\log n}} V_k - (t + d_p(\log n))^2 \xrightarrow{P} -\infty \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.2.106)$$

Aus Korollar 3.1 erhalten wir:

Es gibt eine Folge i.i.d. normalverteilter zentrierter p -dimensionaler Zufallsvektoren $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\text{Cov } Y_1 = \tilde{A}$, so dass gilt:

$$\left\| X_k' \xi_k - \sum_{i=1}^k Y_i \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o \left(k^{\frac{1}{2}} (\log k)^{-\lambda} \right) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.2.107)$$

und es gibt für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge i.i.d. normalverteilter zentrierter p -dimensionaler Zufallsvektoren $\{Y_i^{\{n\}}\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\text{Cov } Y_1^{\{n\}} = \tilde{A}$, so dass gilt:

$$\left\| X_k^* \xi_k^* - \sum_{i=k+1}^n Y_i^{\{n\}} \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o \left((n - k)^{\frac{1}{2}} (\log(n - k))^{-\lambda} \right) \quad (n - k \rightarrow \infty) \quad (3.2.108)$$

für ein $\lambda > 1$.

$$\text{Sei } S(k) := \sum_{i=1}^k Y_i, \quad S^*(k) = S^*(k, n) := \sum_{i=k+1}^n Y_i^{\{n\}}.$$

Aus (3.2.107) bzw. (3.2.108) erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \max_{\log n \leq k \leq n-p} \left| \frac{1}{k} (X'_k \xi_k)' \tilde{A}^{-1} X'_k \xi_k - \frac{1}{k} S'(k) \tilde{A}^{-1} S(k) \right| \\ & \stackrel{P-f.s.}{=} o\left((\log \log n)^{-2\lambda}\right) \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned} \quad (3.2.109)$$

$$\begin{aligned} & \max_{p \leq k \leq n - \log n} \frac{1}{n-k} \left| (X_k^{*'} \xi_k^*)' \tilde{A}^{-1} X_k^{*'} \xi_k^* - S^{*'}(k) \tilde{A}^{-1} S^*(k) \right| \\ & \stackrel{P-f.s.}{=} o\left((\log \log n)^{-2\lambda}\right) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (3.2.110)$$

Weiter gilt für $n \rightarrow \infty$:

$$\max_{p \leq k \leq \log n} \left| \frac{1}{k} S(k)' \tilde{A}^{-1} S(k) \right| \stackrel{S.v. \text{ Iter. Log.}}{=} \mathcal{O}_P(\log \log \log n), \quad (3.2.111)$$

$$\max_{n - \log n \leq k \leq n} \left| \frac{1}{n-k} S^*(k)' \tilde{A}^{-1} S^*(k) \right| \stackrel{S.v. \text{ Iter. Log.}}{=} \mathcal{O}_P(\log \log \log n). \quad (3.2.112)$$

Wegen $n - \frac{2n}{\log n} \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) folgt mit (3.2.5) und Bemerkung 2.2:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left\{ (a(\log n))^2 \max_{\log n \leq k \leq \frac{n}{\log n}} \frac{1}{k} (X'_k \xi_k)' \tilde{A}^{-1} X'_k \xi_k \leq (t + d_p(\log n))^2 \right\} \right. \\ & \cap \left. \left\{ (a(\log n))^2 \max_{n - \frac{n}{\log n} \leq k \leq n - \log n} \frac{1}{n-k} (X_k^{*'} \xi_k^*)' \tilde{A}^{-1} X_k^{*'} \xi_k^* \leq (t + d_p(\log n))^2 \right\} \right) \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left\{ (a(\log n))^2 \max_{\log n \leq k \leq \frac{n}{\log n}} \frac{1}{k} (X'_k \xi_k)' \tilde{A}^{-1} X'_k \xi_k \leq (t + d_p(\log n))^2 \right\} \right) \\ & P \left(\left\{ (a(\log n))^2 \max_{n - \frac{n}{\log n} \leq k \leq n - \log n} \frac{1}{n-k} (X_k^{*'} \xi_k^*)' \tilde{A}^{-1} X_k^{*'} \xi_k^* \leq (t + d_p(\log n))^2 \right\} \right). \end{aligned} \quad (3.2.113)$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(a(\log n) \max_{p \leq k \leq n-p} V_k^{\frac{1}{2}} \leq t + d_p(\log n) \right) \\ & \stackrel{(3.2.104)-(3.2.106)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left\{ (a(\log n))^2 \max_{\log n \leq k \leq \frac{n}{\log n}} \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right)' \mathcal{H}_k \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \leq (t + d_p(\log n))^2 \right\} \right. \\ & \quad \cap \left. \left\{ (a(\log n))^2 \max_{n - \frac{n}{\log n} \leq k \leq n - \log n} \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right)' \mathcal{H}_k \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \leq (t + d_p(\log n))^2 \right\} \right) \\ & \stackrel{(3.2.73), (3.2.74)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left\{ (a(\log n))^2 \max_{\log n \leq k \leq \frac{n}{\log n}} \frac{1}{k} (X'_k \xi_k)' \tilde{A}^{-1} X'_k \xi_k \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \leq (t + d_p(\log n))^2 \} \\
 & \cap \left\{ (a(\log n))^2 \max_{n - \frac{n}{\log n} \leq k \leq n - \log n} \frac{1}{n - k} (X_k^{*'} \xi_k^*)' \tilde{A}^{-1} X_k^{*'} \xi_k^* \right. \\
 & \quad \left. \leq (t + d_p(\log n))^2 \} \right\} \\
 & \stackrel{(3.2.113)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left\{ (a(\log n))^2 \max_{\log n \leq k \leq \frac{n}{\log n}} \frac{1}{k} (X_k' \xi_k)' \tilde{A}^{-1} X_k' \xi_k \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \leq (t + d_p(\log n))^2 \right\} \right) \\
 & P \left(\left\{ (a(\log n))^2 \max_{n - \frac{n}{\log n} \leq k \leq n - \log n} \frac{1}{n - k} (X_k^{*'} \xi_k^*)' \tilde{A}^{-1} X_k^{*'} \xi_k^* \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \leq (t + d_p(\log n))^2 \right\} \right) \\
 & \stackrel{(3.2.109), (3.2.110)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left\{ (a(\log n))^2 \max_{\log n \leq k \leq \frac{n}{\log n}} \frac{1}{k} S(k)' \tilde{A}^{-1} S(k) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \leq (t + d_p(\log n))^2 \right\} \right) \\
 & P \left(\left\{ (a(\log n))^2 \max_{n - \frac{n}{\log n} \leq k \leq n - \log n} \frac{1}{n - k} S^*(k)' \tilde{A}^{-1} S^*(k) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \leq (t + d_p(\log n))^2 \right\} \right) \\
 & \stackrel{(3.2.111), (3.2.112)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left\{ (a(\log n))^2 \max_{p \leq k \leq \frac{n}{\log n}} \frac{1}{k} S(k)' \tilde{A}^{-1} S(k) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \leq (t + d_p(\log n))^2 \right\} \right) \\
 & P \left(\left\{ (a(\log n))^2 \max_{n - \frac{n}{\log n} \leq k \leq n - p} \frac{1}{n - k} S^*(k)' \tilde{A}^{-1} S^*(k) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \leq (t + d_p(\log n))^2 \right\} \right) \\
 & \stackrel{\text{Theorem 2.8}}{=} \exp(-2 \exp(-t)) \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.2.114}
 \end{aligned}$$

□

Beweis: (von Theorem 3.2 und Bemerkung 3.12)

$$\begin{aligned}
 \frac{T_1(n)}{\log \log n} & \geq (\hat{\beta}_{k^*} - \hat{\beta}_{k^*}^*)' \mathcal{H}_{k^*} (\hat{\beta}_{k^*} - \hat{\beta}_{k^*}^*) \\
 & \stackrel{(3.2.101)}{=} \frac{k^*(n - k^*)}{n \log \log n} \tilde{\Delta} + o_P \left(\frac{k^*(n - k^*)}{n \log \log n} \dot{\delta}' \dot{\delta} \right) \\
 & \stackrel{P(3.2.24), \text{Lemma 7.4}}{\longrightarrow} \infty \quad (n \rightarrow \infty).
 \end{aligned}$$

Analog folgt:

$$\frac{T_1^*(n)}{\log \log n} \xrightarrow{P(3.2.103), (3.2.24), \text{Lemma 7.4}} \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

□

3.2.5 Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints

Beweis: (von Theorem 3.3) Aus (3.2.86) und (3.2.87) folgt unter Beachtung von (3.2.24), (3.2.25) und Lemma 7.4 für $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \left(\hat{\beta}_{k^*} - \hat{\beta}_{k^*}^* \right)' H_{k^*}^{-1} \left(\hat{\beta}_{k^*} - \hat{\beta}_{k^*}^* \right) \right| \right. \\ \left. > \max_{p \leq k \leq [k^* - \varepsilon n]} \left| \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right)' H_k^{-1} \left(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_k^* \right) \right| \right) = 1. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\hat{k} \leq [k^* - \varepsilon n] \right) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (3.2.115)$$

Analog zu (3.2.115) folgt aus (3.2.86), (3.2.88):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\hat{k} \geq [k^* + \varepsilon n] \right) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (3.2.116)$$

Aus (3.2.115) und (3.2.116) erhalten wir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{|\hat{k} - k^*|}{n} \geq \varepsilon \right) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

□

3.2.6 Schätzer für \mathcal{H}_k

\mathcal{H}_k ist in praktischen Anwendungen i.A. nicht bekannt. Aus diesem Grund müssen wir \mathcal{H}_k durch einen geeigneten Schätzer $\hat{\mathcal{H}}_k$ ersetzen. Ziel ist die Bestimmung von Schätzern $\hat{\mathcal{H}}_k$ mit der folgenden Eigenschaft unter der Nullhypothese:

$$\max_{p \leq k \leq n-p} \frac{n}{k(n-k)} \left\| \hat{\mathcal{H}}_k - \mathcal{H}_k \right\| = o_P \left((\log \log n)^{-2} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.2.117)$$

Für den Fall der Alternative fordern wir:

$$\frac{n}{k^*(n-k^*)} \left\| \hat{\mathcal{H}}_{k^*} - \mathcal{H}_{k^*} \right\| = o_P(1) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.2.118)$$

(3.2.117) bzw. (3.2.118) gewährleisten, dass die asymptotischen Aussagen über die Teststatistik T_1 aus den Theoremen 3.1 bzw. 3.2 gültig bleiben, wenn man \mathcal{H}_k durch $\hat{\mathcal{H}}_k$ ersetzt, d.h. wenn man T_1^* anstatt T_1 betrachtet (vgl. die Bemerkungen 3.11 und 3.12). Das Verhalten von $\hat{\mathcal{H}}_k$ wird maßgeblich davon beeinflusst, wie gut man die Autokovarianzfunktion von $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ schätzt. Wir stellen zunächst die Grundidee vor, die man in der Changepoint-Analyse gewöhnlich zur Varianzschätzung verwendet. Wir betrachten zur

Veranschaulichung eine Folge von Zufallsvariablen $\tilde{Y}(1), \tilde{Y}(2), \dots, \tilde{Y}(n)$, die folgendem Changepoint-Modell genügen:

$$\tilde{Y}(i) := \begin{cases} i\tilde{\beta} + \zeta_i, & 1 \leq i \leq k^*, \\ i\tilde{\beta}^* + \zeta_i, & k^* < i \leq n, \end{cases}$$

wobei $\tilde{\beta}, \tilde{\beta}^* \in \mathbb{R}$, $\tilde{\beta} \neq \tilde{\beta}^*$ und $\{\zeta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d. mit Varianz $\tilde{\sigma}^2$.

Für den Fall, dass kein Changepoint bis zum Zeitpunkt n vorliegt ($k^* = n$), ist ein geeigneter (konsistenter, erwartungstreuer) Schätzer für die Varianz von $\tilde{Y}(1)$ der folgende:

$$\hat{\sigma}_1^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\tilde{Y}(i) - i\hat{\beta}_n \right)^2,$$

wobei $\hat{\beta}_n$ der Kleinste-Quadrate-Schätzer für $\tilde{\beta}$ mit den Beobachtungen $\tilde{Y}(1), \tilde{Y}(2), \dots, \tilde{Y}(n)$ sei.

Im Falle eines Changepoints würde die Varianz allerdings überschätzt werden.

Die Grundidee bei der Konzeption von Varianzschätzern, die in Modellen mit Changepoint geeignet sind, ist die, dass man die Beobachtungen aufteilt, so dass man Schätzer erhält, die sich aus Beobachtungen ergeben, die keinen Changepoint enthalten. Teilt man die Beobachtungen am Changepoint auf, so erhält man zwei Schätzer für die Varianz, die jeweils auf Beobachtungen ohne Changepoint basieren.

$$\text{Sei } \hat{\sigma}_2^2 := \frac{1}{n-2} \left(\sum_{i=1}^{k^*} \left(\tilde{Y}(i) - i\hat{\beta}_{k^*} \right)^2 + \sum_{i=k^*+1}^n \left(\tilde{Y}(i) - i\hat{\beta}_{k^*}^* \right)^2 \right),$$

wobei $\hat{\beta}_{k^*}$ der Kleinste-Quadrate Schätzer für $\tilde{\beta}$ mit den Beobachtungen bis k^* und $\hat{\beta}_{k^*}^*$ der Kleinste-Quadrate Schätzer für $\tilde{\beta}$ mit den Beobachtungen von $k^* + 1$ bis n sei.

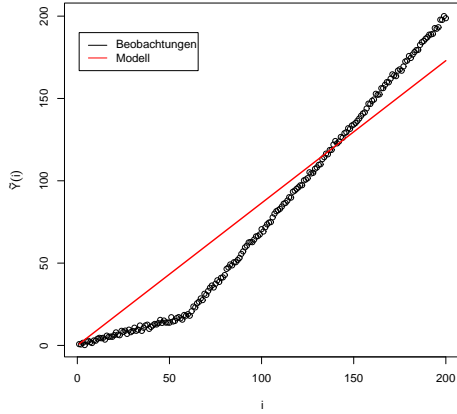


Abbildung 6: Varianzschätzer $\hat{\sigma}_1^2$.

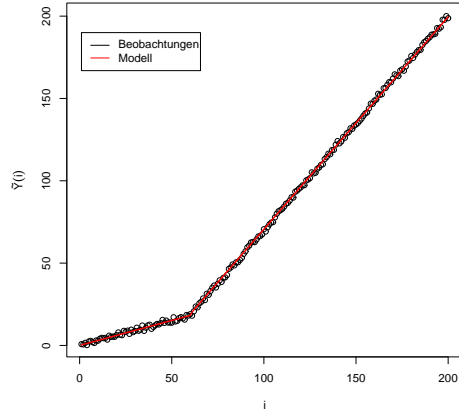


Abbildung 7: Varianzschätzer $\hat{\sigma}_2^2$.

Der Varianzschätzer $\hat{\sigma}_1^2$ summiert die quadratischen Abweichungen zwischen dem Modell ohne Changepoint und den Beobachtungen auf, während der Varianzschätzer $\hat{\sigma}_2^2$ die quadratischen Abweichungen zwischen dem Modell mit Changepoint und den Beobachtungen jeweils vor und nach dem Changepoint aufaddiert.

Der genaue Zeitpunkt eines Changepoints ist i.A. nicht bekannt. Aus diesem Grund teilt man die Beobachtungen an einem Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints.

Bemerkung 3.15. In [Rie00] werden verschiedene Varianzschätzer zur Changepoint-Analyse in linearen Modellen untersucht. Allerdings wird hier nur der Fall unabhängiger Fehlerterme betrachtet. In [AnHu97] werden Varianzschätzer in einem Changepoint-Modell mit korrelierten Fehlertermen untersucht. Jedoch liegt hier kein lineares Modell vor.

Wir betrachten folgende Schätzer für \mathcal{H}_k :

- Standardschätzer:
Der Standardschätzer teilt die Beobachtungen am geschätzten Zeitpunkt des Changepoints, schätzt die Autokovarianzfunktion jeweils mit den Beobachtungen vor und nach dem geschätzten Zeitpunkt des Changepoints getrennt und ermittelt damit die Schätzer für \mathcal{H}_k .
- Alternativschätzer:
Der Alternativschätzer teilt die Beobachtungen ebenfalls am geschätzten Zeitpunkt des Changepoints auf, verwendet zur Schätzung der Autokovarianzfunktion aber nur den Teil, in den mehr Beobachtungen fallen.

Im Folgenden sei für $0 \leq h < \ell \leq n - (h + 1)$, $0 \leq L < \ell < n - (L + 1)$, $p \leq k \leq n - p$, $p \leq \ell \leq n - p$:

$$\hat{F}_\ell(h) := \left(Y_{\ell-h} - X'_{\ell-h} \hat{\beta}_\ell \right)' \left(Y_{h+1,\ell} - X'_{h+1,\ell} \hat{\beta}_\ell \right),$$

$$\hat{F}_\ell^*(h) := \left(Y_{\ell+1,n-h} - X'_{\ell+1,n-h} \hat{\beta}_\ell^* \right)' \left(Y_{\ell+1+h,n} - X'_{\ell+1+h,n} \hat{\beta}_\ell^* \right),$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_{\ell,k,L,n}^{(1)} &:= \frac{n}{k(n-k)} H_k^{-1} \left(\frac{1}{n} X'_n X_n \frac{1}{n-2p} \left(\hat{F}_\ell(0) + \hat{F}_\ell^*(0) \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{h=1}^L \frac{L-h}{L} \frac{1}{n-h} X'_{1,n-h} X_{h+1,n} \frac{1}{n-2h-2p} \left(\hat{F}_\ell(h) + \hat{F}_\ell^*(h) \right) \right)^{-1} H_k^{-1} \\ &\quad (n > 2L + 2p), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_{\ell,k,L,n}^{(2)} &:= \frac{n}{k(n-k)} H_k^{-1} \left(\frac{1}{n} X'_n X_n \frac{1}{\ell-p} \hat{F}_\ell(0) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{h=1}^L \frac{L-h}{L} \frac{1}{n-h} X'_{1,n-h} X_{h+1,n} \frac{1}{\ell-h-p} \hat{F}_\ell(h) \right)^{-1} H_k^{-1} \quad (\ell > L + p), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_{\ell,k,L,n}^{(3)} &:= \frac{n}{k(n-k)} H_k^{-1} \left(\frac{1}{n} X'_n X_n \frac{1}{n-\ell-p} \hat{F}_\ell^*(0) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{h=1}^L \frac{L-h}{L} \frac{1}{n-h} X'_{1,n-h} X_{h+1,n} \frac{1}{n-\ell-h-p} \hat{F}_\ell^*(h) \right)^{-1} H_k^{-1} \quad (n > L + \ell + p), \end{aligned}$$

$\hat{k} = \hat{k}(n)$ ein Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints k^* , $p \leq \hat{k} \leq n - p$.

Standardschätzer

$$\hat{\mathcal{H}}_1(\hat{k}, k, L, n) := \tilde{\mathcal{H}}_{\hat{k}, k, L, n}^{(1)} \quad (L < \hat{k} < n - (L + 1), L < \frac{n}{2} - p, p \leq \hat{k} \leq n - p),$$

Alternativschätzer

$$\hat{\mathcal{H}}_2(\hat{k}, k, L, n) := \begin{cases} \tilde{\mathcal{H}}_{\hat{k}, k, L, n}^{(2)}, & \hat{k} > n - \hat{k}, L + p < \hat{k} \leq n - p, \\ \tilde{\mathcal{H}}_{\hat{k}, k, L, n}^{(3)}, & \hat{k} \leq n - \hat{k}, p \leq \hat{k} < n - L - p. \end{cases}$$

Bemerkung 3.16. $\hat{\mathcal{H}}_1(\hat{k}, k, L, n)$ ist nur definiert, falls gilt:

$$L < \hat{k} < n - (L + 1), \quad (3.2.119)$$

$$L < \frac{n}{2} - p. \quad (3.2.120)$$

(3.2.120) ist (asymptotisch) erfüllt, falls gilt: $L = L(n) = o(n)$ ($n \rightarrow \infty$).

Gilt $L \rightarrow \infty$, $L = o(n)$ ($n \rightarrow \infty$) (vgl. Theorem 3.4, Korollar 3.3, Theorem 3.5, Korollar 3.4), so ist (3.2.119) (asymptotisch) stets erfüllt, falls man einen beliebigen Schätzer \tilde{k} durch $\hat{k} := \min \left(\max \left(\tilde{k}, L + 1 \right), n - (L + 2) \right)$ ersetzt. Bei den Simulationsstudien in Abschnitt 3.2.7 sowie bei den Anwendungsstudien in [Gie02a] wählen wir diese Vorgehensweise. Für den Fall der Alternative ist die Bedingung (3.2.119) (asymptotisch) erfüllt, falls gilt: $L = L(n) = o(n)$, $k^* = [n\tau]$, $0 < \tau < 1$, $\frac{k^* - \hat{k}}{n} = o_P(1)$ (vgl. Theorem 3.3, Bemerkung 3.17). Unter den genannten Voraussetzungen spielt es (asymptotisch) auch keine Rolle, ob der Schätzer \tilde{k} oder \hat{k} verwendet wird. Asymptotisch stimmen die beiden Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints überein. Gilt $L = o(n)$, so ist $\hat{\mathcal{H}}_2(\hat{k}, k, L, n)$ für einen beliebigen Schätzer \hat{k} für den Zeitpunkt des Changepoints ($p \leq \hat{k} \leq n - p$) (asymptotisch) stets definiert.

3.2.6.1 Asymptotisches Verhalten der Schätzer für \mathcal{H}_k

Proposition 3.1. Es gelte H_0 . Weiter gelten (3.2.2)-(3.2.5) sowie (3.2.13)-(3.2.20). Dann folgt für $n \rightarrow \infty$:

$$\max_{p \leq k \leq n, 0 \leq h < k} \left| \hat{F}_k(h) - \xi'_{k-h} \xi_{h+1, k} \right| = \mathcal{O}_P(\log \log n), \quad (3.2.121)$$

$$\max_{1 \leq k \leq n-p, 0 \leq h < n-k} \left| \hat{F}_k^*(h) - \xi'_{k+1, n-h} \xi_{k+1+h, n} \right| = \mathcal{O}_P(\log \log n). \quad (3.2.122)$$

Beweis: Sei $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq n$, $p \leq k \leq n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & Y_{k_1, k_2} - X_{k_1, k_2} \hat{\beta}_k \\ &= X_{k_1, k_2} \beta + \xi_{k_1, k_2} - X_{k_1, k_2} (X'_k X_k)^{-1} X'_k X_k \beta - X_{k_1, k_2} (X'_k X_k)^{-1} X'_k \xi_k \\ &= \xi_{k_1, k_2} - X_{k_1, k_2} (X'_k X_k)^{-1} X'_k \xi_k. \end{aligned} \quad (3.2.123)$$

Analog gilt für $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq n$, $1 \leq k \leq n - p$:

$$Y_{k_1, k_2} - X_{k_1, k_2} \hat{\beta}_k^* = \xi_{k_1, k_2} - X_{k_1, k_2} (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} X_k^{*'} \xi_k^*. \quad (3.2.124)$$

Damit erhalten wir insbesondere für $\max(p, h + 1) \leq k \leq n$:

$$\hat{F}_k(h) = (\xi_{k-h} - X_{k-h} (X'_k X_k)^{-1} X'_k \xi_k)' (\xi_{h+1, k} - X_{h+1, k} (X'_k X_k)^{-1} X'_k \xi_k), \quad (3.2.125)$$

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

und für $1 \leq k \leq \min(n-p, n-h-1)$:

$$\begin{aligned} \hat{F}_k^*(h) &= (\xi_{k+1,n-h} - X_{k+1,n-h}(X_k^{*'}X_k^*)^{-1}X_k^{*'}\xi_k^*)' \\ &\quad (\xi_{k+h+1,n} - X_{k+h+1,n}(X_k^{*'}X_k^*)^{-1}X_k^{*'}\xi_k^*). \end{aligned} \quad (3.2.126)$$

Mit (3.2.125) folgt (3.2.121):

$$\begin{aligned} &\max_{p \leq k \leq n, 0 \leq h < k} \left| \hat{F}_k(h) - \xi'_{k-h} \xi_{h+1,k} \right| \\ &\stackrel{(3.2.125)}{=} \max_{p \leq k \leq n, 0 \leq h < k} \left| -\xi'_{k-h} X_{h+1,k} (X'_k X_k)^{-1} X'_k \xi_k \right. \\ &\quad \left. - \xi'_k X_k (X'_k X_k)^{-1} X'_{k-h} \xi_{h+1,k} \right. \\ &\quad \left. + \xi'_k X_k (X'_k X_k)^{-1} X'_{k-h} X_{h+1,k} (X'_k X_k)^{-1} X'_k \xi_k \right| \\ &\stackrel{\text{Korollar 3.2, (3.2.20), (3.2.32)}}{=} \mathcal{O}_P(\log \log n) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Analog erhalten wir mit (3.2.126) (3.2.122):

$$\begin{aligned} &\max_{1 \leq k \leq n-p, 0 \leq h < n-k} \left| \hat{F}_k^*(h) - \xi'_{k+1,n-h} \xi_{k+1+h,n} \right| \\ &\stackrel{(3.2.126)}{=} \max_{1 \leq k \leq n-p, 0 \leq h < n-k} \left| -\xi'_{k+1,n-h} X_{k+h+1,n} (X_k^{*'}X_k^*)^{-1} X_k^{*'} \xi_k^* \right. \\ &\quad \left. - \xi_k^{*'} X_k^* (X_k^{*'}X_k^*)^{-1} X'_{k+1,n-h} \xi_{k+h+1,n} \right. \\ &\quad \left. + \xi_k^{*'} X_k^* (X_k^{*'}X_k^*)^{-1} X'_{k+1,n-h} X_{k+h+1,n} (X_k^{*'}X_k^*)^{-1} X_k^{*'} \xi_k^* \right| \\ &\stackrel{\text{Korollar 3.2, (3.2.20), (3.2.33)}}{=} \mathcal{O}_P(\log \log n) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

□

Vor dem Hintergrund von Proposition 3.1 ist es für das Studium des asymptotischen Verhaltens der Schätzer für \mathcal{H}_k von entscheidender Bedeutung, das asymptotische Verhalten von $\frac{1}{k-h} \xi'_k \xi_{k+h}$ bzw. $\frac{1}{n-k-h} \xi'_{k+1,n-h} \xi_{k+1+h,n}$ im Vergleich zu $\gamma(h)$ ($h \geq 0$) zu kennen. Hierzu dienen die beiden folgenden Propositionen.

Proposition 3.2. *Es seien die Bedingungen (3.2.10)-(3.2.12) erfüllt. Dann folgt:*

$$\left| \frac{1}{k} \xi'_k \xi_k - \gamma(0) \right| = o_P \left(k^{-\frac{\delta}{2+\delta}} \right) \quad (k = k(n) \rightarrow \infty), \quad (3.2.127)$$

$$\left| \frac{1}{n-k} \xi_k^{*'} \xi_k^* - \gamma(0) \right| = o_P \left((n-k)^{-\frac{\delta}{2+\delta}} \right) \quad (n-k(n) \rightarrow \infty). \quad (3.2.128)$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
 & \xi'_k \xi_k \\
 = & \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j \tilde{\varepsilon}_{i-j} \right)^2 \\
 = & \sum_{i=1}^k \left(\left(\sum_{j=0}^k a_j \tilde{\varepsilon}_{i-j} \right)^2 + 2 \sum_{j_1=0}^k a_{j_1} \tilde{\varepsilon}_{i-j_1} \sum_{j_2=k+1}^{\infty} a_{j_2} \tilde{\varepsilon}_{i-j_2} + \left(\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j \tilde{\varepsilon}_{i-j} \right)^2 \right) \\
 = & \sum_{i=1}^k (A^{(i)} + 2B^{(i)} + C^{(i)}), \tag{3.2.129}
 \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 A^{(i)} &= A^{(i,k)} := \left(\sum_{j=0}^k a_j \tilde{\varepsilon}_{i-j} \right)^2, \\
 B^{(i)} &= B^{(i,k)} := \sum_{j_1=0}^k a_{j_1} \tilde{\varepsilon}_{i-j_1} \sum_{j_2=k+1}^{\infty} a_{j_2} \tilde{\varepsilon}_{i-j_2}, \\
 C^{(i)} &= C^{(i,k)} := \left(\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j \tilde{\varepsilon}_{i-j} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Bei allen folgenden asymptotischen Aussagen für den Rest des Beweises von Proposition 3.2 betrachten wir den Fall $k = k(n) \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned}
 & \text{Var} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k B^{(i)} \\
 = & \frac{1}{k^2} \left[\sum_{i=1}^k \mathbb{E} \left(\left(\sum_{j_1=0}^k a_{j_1} \tilde{\varepsilon}_{i-j_1} \right)^2 \left(\sum_{j_2=k+1}^{\infty} a_{j_2} \tilde{\varepsilon}_{i-j_2} \right)^2 \right) \right. \\
 & + 2 \sum_{1 \leq i \leq k, 1 \leq h \leq k-i} \mathbb{E} \left(\sum_{j_3=0}^k a_{j_3} \tilde{\varepsilon}_{i-j_3} \sum_{j_4=k+1}^{\infty} a_{j_4} \tilde{\varepsilon}_{i-j_4} \right. \\
 & \left. \left. \sum_{j_5=0}^k a_{j_5} \tilde{\varepsilon}_{i+h-j_5} \sum_{j_6=k+1}^{\infty} a_{j_6} \tilde{\varepsilon}_{i+h-j_6} \right) \right] \\
 = & \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k \left[\mathbb{E} \left(\left(\sum_{j_1=0}^k a_{j_1} \tilde{\varepsilon}_{i-j_1} \right)^2 \left(\sum_{j_2=k+1}^{\infty} a_{j_2} \tilde{\varepsilon}_{i-j_2} \right)^2 \right) \right. \\
 & + 2 \sum_{h=1}^{k-i} \mathbb{E} \left(\sum_{j_3=0}^k a_{j_3} \tilde{\varepsilon}_{i-j_3} \sum_{j_5=-h}^{k-h} a_{j_5+h} \tilde{\varepsilon}_{i-j_5} \right. \\
 & \left. \left. \sum_{j_4=k+1}^{\infty} a_{j_4} \tilde{\varepsilon}_{i-j_4} \sum_{j_6=k-h+1}^{\infty} a_{j_6+h} \tilde{\varepsilon}_{i-j_6} \right) \right]
 \end{aligned}$$

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

$$\begin{aligned}
(3.2.11) \quad & \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k \left[\mathbb{E} \left(\sum_{j_1=0}^k a_{j_1} \tilde{\varepsilon}_{i-j_1} \right)^2 \mathbb{E} \left(\sum_{j_2=k+1}^{\infty} a_{j_2} \tilde{\varepsilon}_{i-j_2} \right)^2 \right. \\
& + 2 \sum_{h=1}^{k-i} \left(\mathbb{E} \left(\sum_{j_3=0}^{k-h} a_{j_3} \tilde{\varepsilon}_{i-j_3} \sum_{j_5=-h}^{k-h} a_{j_5+h} \tilde{\varepsilon}_{i-j_5} \right) \right. \\
& \mathbb{E} \left(\sum_{j_4=k+1}^{\infty} a_{j_4} \tilde{\varepsilon}_{i-j_4} \sum_{j_6=k-h+1}^{\infty} a_{j_6+h} \tilde{\varepsilon}_{i-j_6} \right) \\
& + \mathbb{E} \left(\sum_{j_3=k-h+1}^k a_{j_3} \tilde{\varepsilon}_{i-j_3} \sum_{j_6=k-h+1}^{\infty} a_{j_6+h} \tilde{\varepsilon}_{i-j_6} \right) \\
& \left. \left. \mathbb{E} \left(\sum_{j_5=-h}^{k-h} a_{j_5+h} \tilde{\varepsilon}_{i-j_5} \sum_{j_4=k+1}^{\infty} a_{j_4} \tilde{\varepsilon}_{i-j_4} \right) \right) \right] \\
(3.2.11), (3.2.12), S.v. Leb., Beppo Levi \quad & \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j_1=0}^k a_{j_1}^2 \sum_{j_2=k+1}^{\infty} a_{j_2}^2 \right. \\
& + 2 \sum_{h=1}^{k-i} \left(\sum_{j_3=0}^{k-h} a_{j_3} a_{j_3+h} \sum_{j_4=k+1}^{\infty} a_{j_4} a_{j_4+h} \right) \Big) \tau^4 \\
= \quad & \mathcal{O} \left(\left(\frac{1}{k^4} \sum_{i=1}^k \sum_{j_2=k+1}^{\infty} j_2^2 a_{j_2}^2 + \frac{2}{k^2} \sum_{i=1}^k \sum_{h=1}^{k-i} \right. \right. \\
& \left. \left. \left(\sum_{j_1=0}^{k-h} (a_{j_3}^2 + a_{j_3+h}^2) \frac{1}{k^2} \sum_{j_4=k+1}^{\infty} j_4^2 (a_{j_4}^2 + a_{j_4+h}^2) \right) \right) \tau^4 \right) \\
(3.2.12) \quad & \stackrel{=}{=} o(k^{-2}). \tag{3.2.130}
\end{aligned}$$

Mit Lemma 7.8 folgt aus (3.2.130):

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k B^{(i)} = o_P(k^{-1}). \tag{3.2.131}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k C^{(i)} &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \left(\sum_{j_1=k+1}^{\infty} a_{j_1} \tilde{\varepsilon}_{i-j_1} \sum_{j_2=k+1}^{\infty} a_{j_2} \tilde{\varepsilon}_{i-j_2} \right) \\
(3.2.11), (3.2.12), S.v. Leb., Beppo Levi \quad & \stackrel{=}{=} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \sum_{j_1=k+1}^{\infty} a_{j_1}^2 \mathbb{E} \tilde{\varepsilon}_{i-j_1}^2 \\
&\leq \tau^2 \frac{1}{k^2} \sum_{j_1=k+1}^{\infty} j_1^2 a_{j_1}^2 \\
(3.2.12) \quad & \stackrel{=}{=} o(k^{-2}). \tag{3.2.132}
\end{aligned}$$

Aus (3.2.132) erhalten wir mit Lemma 7.8:

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k C^{(i)} = o_P(k^{-2}). \quad (3.2.133)$$

Wir betrachten die Terme $A^{(i)}$. Diese spalten wir in zwei Summanden auf:

$$A^{(i)} = A_1^{(i)} + 2A_2^{(i)}, \quad (3.2.134)$$

$$A_1^{(i)} := \sum_{j=0}^k a_j^2 \tilde{\varepsilon}_{i-j}^2,$$

$$A_2^{(i)} := \sum_{j=0}^k \sum_{\nu=j+1}^k a_j a_\nu \tilde{\varepsilon}_{i-j} \tilde{\varepsilon}_{i-\nu}.$$

$$\begin{aligned} & \text{Var} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k A_2^{(i)} \right) \\ &= \frac{1}{k^2} \sum_{i_1=1}^k \sum_{i_2=1}^k \sum_{j_1=0}^k \sum_{\nu_1=j_1+1}^k \sum_{j_2=0}^k \sum_{\nu_2=j_2+1}^k \\ & \quad \text{E} (a_{j_1} a_{\nu_1} a_{j_2} a_{\nu_2} \tilde{\varepsilon}_{i_1-j_1} \tilde{\varepsilon}_{i_1-\nu_1} \tilde{\varepsilon}_{i_2-j_2} \tilde{\varepsilon}_{i_2-\nu_2}) \\ & \stackrel{(3.2.136)}{=} \frac{1}{k^2} \sum_{i_1=1}^k \sum_{j_1=0}^k \sum_{\nu_1=j_1+1}^k \sum_{j_2=0}^k \sum_{\nu_2=j_2+1}^k \text{E} (a_{j_1} a_{\nu_1} a_{j_2} a_{\nu_2} \tilde{\varepsilon}_{i_1-j_1}^2 \tilde{\varepsilon}_{i_1-\nu_1}^2) \\ & \stackrel{(3.2.11), j_1 \neq \nu_1}{=} \frac{\tau^4}{k^2} \sum_{i_1=1}^k \sum_{j_1=0}^k \sum_{\nu_1=1}^k \sum_{j_2=0}^k \sum_{\nu_2=1}^k a_{j_1} a_{\nu_1} a_{j_2} a_{\nu_2} \\ & \stackrel{(3.2.12)}{=} \mathcal{O}(k^{-1}). \end{aligned} \quad (3.2.135)$$

Die einzelnen Summanden leisten aufgrund der Unabhängigkeit und Zentriertheit von $\{\tilde{\varepsilon}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ nur dann einen Beitrag zur Varianz in (3.2.135), falls gilt:

$$i_2 = i_1 - j_1 + j_2 \quad \text{und} \quad i_2 = i_1 - \nu_1 + \nu_2. \quad (3.2.136)$$

Aus (3.2.135) folgt mit Lemma 7.8:

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k A_2^{(i)} = \mathcal{O}_P(k^{-\frac{1}{2}}). \quad (3.2.137)$$

Aus (3.2.134), (3.2.137) erhalten wir:

$$\left| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k A^{(i)} - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k A_1^{(i)} \right| = \mathcal{O}_P(k^{-\frac{1}{2}}). \quad (3.2.138)$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^k A_1^{(i)} &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^k a_j^2 \tilde{\varepsilon}_{i-j}^2 \\
 &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^k a_j^2 \tilde{\varepsilon}_i^2 + \sum_{j=1}^k a_j^2 \sum_{i=0}^{j-1} (\tilde{\varepsilon}_{-i}^2 - \tilde{\varepsilon}_{k-i}^2) \\
 &\stackrel{\text{Th. 7.1, (3.2.11) } P\text{-f.s.}}{=} \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^k a_j^2 \tilde{\varepsilon}_i^2 + \sum_{j=1}^k a_j^2 o\left(j^{\frac{2}{2+\delta}}\right) \\
 &\stackrel{(3.2.12) }{=}^{P\text{-f.s.}} \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^k a_j^2 \tilde{\varepsilon}_i^2 + \mathcal{O}(1). \tag{3.2.139}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E} \left| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 \tilde{\varepsilon}_i^2 - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^k a_j^2 \tilde{\varepsilon}_i^2 \right| \\
 &\stackrel{(3.2.11), (3.2.12), S. v. Beppo Levi}{\leq} \frac{1}{k^2} \sum_{j=k+1}^{\infty} j^2 a_j^2 \tau^2 \\
 &\stackrel{(3.2.12)}{=} o(k^{-2}). \tag{3.2.140}
 \end{aligned}$$

Aus (3.2.140) erhalten wir unter Verwendung von Lemma 7.8:

$$\left| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 \tilde{\varepsilon}_i^2 - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^k a_j^2 \tilde{\varepsilon}_i^2 \right| = o_P(k^{-2}). \tag{3.2.141}$$

Aus (3.2.138), (3.2.139), (3.2.141) folgt:

$$\left| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k A^{(i)} - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 \tilde{\varepsilon}_i^2 \right| = \mathcal{O}_P(k^{-\frac{1}{2}}). \tag{3.2.142}$$

Mit (3.2.129), (3.2.131), (3.2.133), (3.2.142) folgt:

$$\left| \frac{1}{k} \xi'_k \xi_k - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 \tilde{\varepsilon}_i^2 \right| = \mathcal{O}_P(k^{-\frac{1}{2}}). \tag{3.2.143}$$

Aus Theorem 7.1 (Gesetz der großen Zahlen von Marcinkiewicz-Zygmund) erhalten wir:

$$\left| \sum_{i=1}^k \tilde{\varepsilon}_i^2 - k\tau^2 \right| \stackrel{P\text{-f.s.}}{=} o\left(k^{\frac{2}{2+\delta}}\right) \tag{3.2.144}$$

und damit:

$$\left| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 \tilde{\varepsilon}_i^2 - \tau^2 \sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 \right| \stackrel{(3.2.12), (3.2.144) }{=}^{P\text{-f.s.}} o\left(k^{-\frac{\delta}{2+\delta}}\right). \tag{3.2.145}$$

Aus (3.2.143), (3.2.145) folgt (3.2.127).

(3.2.128) folgt analog zu (3.2.127). \square

Proposition 3.3. *Es seien die Bedingungen (3.2.5) sowie (3.2.10)-(3.2.12), (3.2.20) erfüllt. Für $k = k(n)$ gelte: $\min\{k, n - k\} \uparrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). Für $L = L(n)$ gelte: $L \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$), $L = o(\min\{k, n - k\})$ ($n \rightarrow \infty$). Dann folgt für $n \rightarrow \infty$:*

$$\left| \sum_{h=1}^L \frac{L-h}{L(k-h)} \xi'_{k-h} \xi_{h+1,k} - \sum_{h=1}^L \frac{L-h}{L} \gamma(h) \right| \quad (3.2.146)$$

$$= o_P \left(k^{-\frac{\delta}{2+\delta}} + \frac{1}{L} \right) \quad (L < k),$$

$$\left\| \sum_{h=1}^L \frac{L-h}{L(n-h)(k-h)} X'_{n-h} X_{h+1,n} \xi'_{k-h} \xi_{h+1,k} - \sum_{h=1}^L \frac{L-h}{L(n-h)} X'_{n-h} X_{h+1,n} \gamma(h) \right\|$$

$$= o_P \left(k^{-\frac{\delta}{2+\delta}} + \frac{1}{L} \right) \quad (L < k), \quad (3.2.147)$$

$$\left| \sum_{h=1}^L \frac{L-h}{L(n-h-k)} \xi'_{k+1,n-h} \xi_{k+1+h,n} - \sum_{h=1}^L \frac{L-h}{L} \gamma(h) \right| \quad (3.2.148)$$

$$= o_P \left((n-k)^{-\frac{\delta}{2+\delta}} + \frac{1}{L} \right) \quad (L < n-k),$$

$$\left\| \sum_{h=1}^L \frac{L-h}{L(n-h)(n-h-k)} X'_{n-h} X_{h+1,n} \xi'_{k+1,n-h} \xi_{k+1+h,n} \right. \quad (3.2.149)$$

$$\left. - \sum_{h=1}^L \frac{L-h}{L(n-h)} X'_{n-h} X_{h+1,n} \gamma(h) \right\| = o_P \left((n-k)^{-\frac{\delta}{2+\delta}} + \frac{1}{L} \right) \quad (L < n-k).$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} & \xi'_{k-h} \xi_{h+1,k} \\ = & \sum_{i=1}^{k-h} \sum_{j_1=0}^{\infty} a_{j_1} \tilde{\varepsilon}_{i-j_1} \sum_{j_2=0}^{\infty} a_{j_2} \tilde{\varepsilon}_{i-j_2+h} \\ = & \sum_{i=1}^{k-h} \sum_{j_1=0}^L a_{j_1} \tilde{\varepsilon}_{i-j_1} \sum_{j_2=0}^{L+h} a_{j_2} \tilde{\varepsilon}_{i-j_2+h} + \sum_{i=1}^{k-h} \sum_{j_1=L+1}^{\infty} a_{j_1} \tilde{\varepsilon}_{i-j_1} \sum_{j_2=0}^{L+h} a_{j_2} \tilde{\varepsilon}_{i-j_2+h} \\ & + \sum_{i=1}^{k-h} \sum_{j_1=0}^L a_{j_1} \tilde{\varepsilon}_{i-j_1} \sum_{j_2=L+h+1}^{\infty} a_{j_2} \tilde{\varepsilon}_{i-j_2+h} + \sum_{i=1}^{k-h} \sum_{j_1=L+1}^{\infty} a_{j_1} \tilde{\varepsilon}_{i-j_1} \sum_{j_2=L+h+1}^{\infty} a_{j_2} \tilde{\varepsilon}_{i-j_2+h} \\ = & \sum_{i=1}^{k-h} \bar{A}^{(i,h)} + \bar{B}^{(i,h)} + \bar{C}^{(i,h)} + \bar{D}^{(i,h)}, \end{aligned} \quad (3.2.150)$$

wobei

$$\bar{A}^{(i,h)} = \bar{A}^{(i,h,L)} := \sum_{j_1=0}^L a_{j_1} \tilde{\varepsilon}_{i-j_1} \sum_{j_2=0}^{L+h} a_{j_2} \tilde{\varepsilon}_{i-j_2+h},$$

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

$$\begin{aligned}\bar{B}^{(i,h)} &= \bar{B}^{(i,h,L)} := \sum_{j_1=L+1}^{\infty} a_{j_1} \tilde{\varepsilon}_{i-j_1} \sum_{j_2=0}^{L+h} a_{j_2} \tilde{\varepsilon}_{i-j_2+h}, \\ \bar{C}^{(i,h)} &= \bar{C}^{(i,h,L)} := \sum_{j_1=0}^L a_{j_1} \tilde{\varepsilon}_{i-j_1} \sum_{j_2=L+h+1}^{\infty} a_{j_2} \tilde{\varepsilon}_{i-j_2+h}, \\ \bar{D}^{(i,h)} &= \bar{D}^{(i,h,L)} := \sum_{j_1=L+1}^{\infty} a_{j_1} \tilde{\varepsilon}_{i-j_1} \sum_{j_2=L+h+1}^{\infty} a_{j_2} \tilde{\varepsilon}_{i-j_2+h}.\end{aligned}$$

Bei allen folgenden asymptotischen Aussagen für den Rest des Beweises von Proposition 3.3 betrachten wir den Fall $n \rightarrow \infty$.

Mit (3.2.11), (3.2.12), (3.2.152), dem Satz von Lebesgue sowie dem Satz von Beppo Levi erhalten wir:

$$\begin{aligned}& \text{Var} \left(\frac{1}{k-h} \sum_{i=1}^{k-h} B^{(i,h)} \right) \\&= \mathbb{E} \left(\left(\frac{1}{k-h} \sum_{i=1}^{k-h} \sum_{j_1=L+1}^{\infty} a_{j_1} \tilde{\varepsilon}_{i-j_1} \sum_{j_2=0}^{L+h} a_{j_2} \tilde{\varepsilon}_{i-j_2+h} \right)^2 \right) \\&= (k-h)^{-2} \left(\sum_{i=1}^{k-h} \mathbb{E} \left(\sum_{j_1=L+1}^{\infty} a_{j_1} \tilde{\varepsilon}_{i-j_1} \sum_{j_2=0}^{L+h} a_{j_2} \tilde{\varepsilon}_{i-j_2+h} \right)^2 + 2 \sum_{1 \leq i_1 \leq k-h, i_1 < i_2 \leq k-h} \right. \\& \quad \left. \mathbb{E} \left(\sum_{j_3=L+1}^{\infty} \sum_{j_4=0}^{L+h} \sum_{j_5=L+1}^{\infty} \sum_{j_6=0}^{L+h} a_{j_3} a_{j_4} a_{j_5} a_{j_6} \tilde{\varepsilon}_{i_1-j_3} \tilde{\varepsilon}_{i_1-j_4+h} \tilde{\varepsilon}_{i_2-j_5} \tilde{\varepsilon}_{i_2-j_6+h} \right) \right) \\&= (k-h)^{-2} \left(\sum_{j_1=L+1}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{L+h} a_{j_1}^2 a_{j_2}^2 \tau^4 \right. \\& \quad \left. + 2 \sum_{1 \leq i_1 \leq k-h, i_1 < i_2 \leq k-h} \sum_{j_3=L+1}^{\infty} \sum_{j_4=0}^{L+h} \sum_{j_5=L+1}^{\infty} \sum_{j_6=0}^{L+h} a_{j_3} a_{j_4} a_{j_5} a_{j_6} \tau^4 \right) \\&= o \left(\frac{1}{(k-h)L^2} \right).\end{aligned} \tag{3.2.151}$$

Die einzelnen Summanden leisten in (3.2.151) aufgrund der Unabhängigkeit und Zentriertheit von $\{\tilde{\varepsilon}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ nur dann einen Beitrag, falls gilt:

$$i_1 = i_2 + j_3 - j_5 \quad \text{und} \quad i_1 = i_2 + j_4 - j_6. \tag{3.2.152}$$

Aus (3.2.151) folgt mit Lemma 7.8:

$$\sum_{h=1}^L \frac{1}{k-h} \sum_{i=1}^{k-h} B^{(i,h)} = o_P \left(k^{-\frac{1}{2}} \right). \tag{3.2.153}$$

Analog zu (3.2.153) erhalten wir:

$$\sum_{h=1}^L \frac{1}{k-h} \sum_{i=1}^{k-h} C^{(i,h)} = o_P \left(k^{-\frac{1}{2}} \right). \quad (3.2.154)$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\left| \sum_{h=1}^L \frac{1}{k-h} \sum_{i=1}^{k-h} \bar{D}^{(i,h)} \right| \right) \\ & \leq \sum_{h=1}^L \sum_{i=1}^{k-h} \frac{1}{k-h} \mathbb{E} \left(\sum_{j_1=L+1}^{\infty} \sum_{j_2=L+1+h}^{\infty} |a_{j_1} a_{j_2}| (\tilde{\varepsilon}_{i-j_1}^2 + \tilde{\varepsilon}_{i-j_2+h}^2) \right) \\ & \stackrel{(3.2.11), (3.2.12), S. v. B.L.}{=} \frac{1}{L} \sum_{j_1=L+1}^{\infty} \sum_{j_2=L+1+h}^{\infty} L^2 |a_{j_1} a_{j_2}| \mathbb{E} (|\tilde{\varepsilon}_{i-j_1}^2 + \tilde{\varepsilon}_{i-j_2+h}^2|) \\ & \stackrel{(3.2.12)}{=} o(L^{-1}). \end{aligned} \quad (3.2.155)$$

Aus (3.2.155) folgt mit Lemma 7.8:

$$\sum_{h=1}^L \frac{1}{k-h} \sum_{i=1}^{k-h} \bar{D}^{(i,h)} = o_P(L^{-1}). \quad (3.2.156)$$

Wir betrachten die Terme $\bar{A}^{(i,h)}$. Diese spalten wir folgendermaßen auf:

$$\bar{A}^{(i,h)} = \bar{A}_1^{(i,h)} + \bar{A}_2^{(i,h)} + \bar{A}_3^{(i,h)}, \quad (3.2.157)$$

wobei $\bar{A}_1^{(i,h)} = \bar{A}_1^{(i,h,L)} := \sum_{j=0}^L a_j a_{j+h} \tilde{\varepsilon}_{i-j}^2,$

$$\bar{A}_2^{(i,h)} = \bar{A}_2^{(i,h,L)} := \sum_{j_1=0}^L \sum_{j_2=j_1+1}^L a_{j_1} a_{j_2+h} \tilde{\varepsilon}_{i-j_1} \tilde{\varepsilon}_{i-j_2},$$

$$\bar{A}_3^{(i,h)} = \bar{A}_3^{(i,h,L)} := \sum_{j_2=-h}^L \sum_{j_1=0}^{j_2-1} a_{j_2+h} a_{j_1} \tilde{\varepsilon}_{i-j_2} \tilde{\varepsilon}_{i-j_1}.$$

$$\begin{aligned} & \text{Var} \left(\sum_{h=1}^L \sum_{i=1}^{k-h} \frac{1}{k-h} \bar{A}_2^{(i,h)} \right) \\ & = \sum_{h_1=1}^L \sum_{h_2=1}^L \sum_{i_1=1}^{k-h_1} \sum_{i_2=1}^{k-h_2} \sum_{j_1=0}^L \sum_{j_2=j_1+1}^L \sum_{j_3=0}^L \sum_{j_4=j_3+1}^L \frac{1}{k-h_1} \frac{1}{k-h_2} \\ & \quad a_{j_1} a_{j_2+h_1} a_{j_3} a_{j_4+h_2} \mathbb{E} (\tilde{\varepsilon}_{i_1-j_1} \tilde{\varepsilon}_{i_1-j_1} \tilde{\varepsilon}_{i_2-j_3} \tilde{\varepsilon}_{i_2-j_4}) \\ & \stackrel{(3.2.159)}{=} \sum_{h_1=1}^L \sum_{h_2=1}^L \sum_{i_1=1}^{k-h_1} \sum_{j_1=0}^L \sum_{j_2=j_1+1}^L \sum_{j_3=0}^L \sum_{j_4=j_3+1}^L \frac{1}{k-h_1} \frac{1}{k-h_2} \\ & \quad a_{j_1} a_{j_2+h_1} a_{j_3} a_{j_4+h_2} \mathbb{E} (\tilde{\varepsilon}_{i_1-j_1}^2 \tilde{\varepsilon}_{i_1-j_2}^2) \\ & \stackrel{(3.2.11), j_1 \neq j_2}{\leq} \frac{1}{k-L} \sum_{h_1=1}^L \sum_{j_1=0}^L \sum_{j_2=j_1+1}^L \sum_{h_2=1}^L \sum_{j_3=0}^L \sum_{j_4=j_3+1}^L a_{j_1} a_{j_2+h_1} a_{j_3} a_{j_4+h_2} \tau^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{1}{k-L} \sum_{j_1=0}^L |a_{j_1}| \sum_{j_3=0}^L |a_{j_3}| \sum_{\ell_1=1}^L \ell_1 |a_{\ell_1}| \sum_{\ell_2=1}^L \ell_2 |a_{\ell_2}| \tau^4 \\
 &\stackrel{(3.2.12)}{=} \mathcal{O}(k^{-1}).
 \end{aligned} \tag{3.2.158}$$

Die einzelnen Summanden leisten aufgrund der Unabhängigkeit und Zentriertheit von $\{\tilde{\varepsilon}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ nur dann einen Beitrag zur Varianz, wenn gilt:

$$i_2 = i_1 - j_3 + j_2 \quad \text{und} \quad i_2 = i_1 - j_2 + j_4. \tag{3.2.159}$$

Aus (3.2.158) folgt mit Lemma 7.8:

$$\sum_{h=1}^L \frac{1}{k-h} \sum_{i=1}^{k-h} \bar{A}_2^{(i,h)} = \mathcal{O}_P(k^{-\frac{1}{2}}). \tag{3.2.160}$$

Analog zu (3.2.160) erhalten wir:

$$\sum_{h=1}^L \frac{1}{k-h} \sum_{i=1}^{k-h} \bar{A}_3^{(i,h)} = \mathcal{O}_P(k^{-\frac{1}{2}}). \tag{3.2.161}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{h=1}^L \frac{1}{k-h} \sum_{i=1}^{k-h} A_1^{(i,h)} \\
 &= \sum_{h=1}^L \frac{1}{k-h} \sum_{i=1}^{k-h} \sum_{j=0}^L a_j a_{j+h} \tilde{\varepsilon}_{i-j}^2 \\
 &= \sum_{h=1}^L \frac{1}{k-h} \sum_{i=1}^{k-h} \sum_{j=0}^L a_j a_{j+h} \tilde{\varepsilon}_i^2 + \sum_{h=1}^L \frac{1}{k-h} \sum_{j=1}^L a_j a_{j+h} \sum_{i=0}^{j-1} (\tilde{\varepsilon}_{-i}^2 - \tilde{\varepsilon}_{k-i}^2) \\
 &\stackrel{(3.2.11), Th. 7.1 P-f.s.}{=} \sum_{h=1}^L \frac{1}{k-h} \sum_{i=1}^{k-h} \sum_{j=0}^L a_j a_{j+h} \tilde{\varepsilon}_i^2 + \sum_{h=1}^L \frac{1}{k-h} \sum_{j=1}^L a_j a_{j+h} o\left(j^{\frac{2}{2+\delta}}\right) \\
 &\stackrel{(3.2.12) P-f.s.}{=} \sum_{h=1}^L \frac{1}{k-h} \sum_{i=1}^{k-h} \sum_{j=0}^L a_j a_{j+h} \tilde{\varepsilon}_i^2 + \mathcal{O}(k^{-1}).
 \end{aligned} \tag{3.2.162}$$

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E} \left| \sum_{h=1}^L \frac{1}{k-h} \sum_{i=1}^{k-h} \sum_{j=0}^L a_j a_{j+h} \tilde{\varepsilon}_i^2 - \sum_{h=1}^L \frac{1}{k-h} \sum_{i=1}^{k-h} \sum_{j=0}^{\infty} a_j a_{j+h} \tilde{\varepsilon}_i^2 \right| \\
 &= \mathbb{E} \left| \sum_{h=1}^L \frac{1}{k-h} \sum_{i=1}^{k-h} \sum_{j=L+1}^{\infty} a_j a_{j+h} \tilde{\varepsilon}_i^2 \right| \\
 &\stackrel{(3.2.11), (3.2.12), S. v. B.L.}{\leq} \sum_{h=1}^L \frac{1}{L^2} \sum_{j=L+1}^{\infty} j^2 (a_j^2 + a_{j+h}^2) \tau^2 \\
 &\stackrel{(3.2.12)}{=} o(L^{-1}).
 \end{aligned} \tag{3.2.163}$$

Mit (3.2.163) erhalten wir unter Verwendung von Lemma 7.8:

$$\left| \sum_{h=1}^L \frac{1}{k-h} \sum_{i=1}^{k-h} \sum_{j=0}^L a_j a_{j+h} \tilde{\varepsilon}_i^2 - \sum_{h=1}^L \frac{1}{k-h} \sum_{i=1}^{k-h} \sum_{j=0}^{\infty} a_j a_{j+h} \tilde{\varepsilon}_i^2 \right| = o_P(L^{-1}). \quad (3.2.164)$$

Aus (3.2.157), (3.2.160)-(3.2.164) folgt:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{h=1}^L \frac{1}{k-h} \sum_{i=1}^{k-h} A^{(i,h)} - \sum_{h=1}^L \frac{1}{k-h} \sum_{i=1}^{k-h} \sum_{j=0}^{\infty} a_j a_{j+h} \tilde{\varepsilon}_i^2 \right| \\ &= o_P(L^{-1}) + \mathcal{O}_P(k^{-\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (3.2.165)$$

Mit (3.2.150), (3.2.153), (3.2.154), (3.2.156), (3.2.165) erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{h=1}^L \frac{1}{k-h} \xi'_{k-h} \xi_{h+1,k} - \sum_{h=1}^L \frac{1}{k-h} \sum_{i=1}^{k-h} \sum_{j=0}^{\infty} a_j a_{j+h} \tilde{\varepsilon}_i^2 \right| \\ &= o_P(L^{-1}) + \mathcal{O}_P(k^{-\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (3.2.166)$$

Aus Theorem 7.1 (Gesetz der großen Zahlen von Marcinkiewicz-Zygmund) folgt:

$$\max_{1 \leq h \leq L} \left| \sum_{i=1}^{k-h} \tilde{\varepsilon}_i^2 - (k-h) \tau^2 \right| \stackrel{P-f.s.}{=} o\left((k-h)^{\frac{2}{2+\delta}}\right). \quad (3.2.167)$$

Mit (3.2.167) und Bemerkung 3.4 erhalten wir:

$$\left| \sum_{h=1}^L \frac{L-h}{L} \frac{1}{k-h} \sum_{i=1}^{k-h} \sum_{j=0}^{\infty} a_j a_{j+h} \tilde{\varepsilon}_i^2 - \tau^2 \sum_{h=1}^L \frac{L-h}{L} \sum_{j=0}^{\infty} a_j a_{j+h} \right| \stackrel{P-f.s.}{=} o\left(k^{-\frac{\delta}{2+\delta}}\right). \quad (3.2.168)$$

Aus (3.2.166), (3.2.168) folgt (3.2.146)

$$\text{Wegen } \max_{1 \leq h \leq n} \left\| \frac{1}{n-h} X'_{n-h} X_{h+1,n} \right\| \stackrel{(3.2.20), \text{Lemma 7.7}}{=} \mathcal{O}_P(1) \quad (3.2.169)$$

folgt (3.2.147) analog.

Der Nachweis von (3.2.148) sowie (3.2.149) verläuft analog. \square

Unter Verwendung der Propositionen 3.1 - 3.3 sind wir in der Lage, das asymptotische Verhalten von $\hat{\mathcal{H}}_1$, $\hat{\mathcal{H}}_2$ unter der Nullhypothese zu beschreiben.

Theorem 3.4. *Es gelte H_0 und es seien die Bedingungen (3.2.5)-(3.2.20) erfüllt.*

Weiter gelte $L = L(n) \rightarrow \infty$, $L = o(n)$ ($n \rightarrow \infty$), $p \leq \hat{k} \leq n - p$.

Dann gilt für $i = 1, 2$, $n \rightarrow \infty$:

$$\max_{p \leq k \leq n-p} \frac{n}{k(n-k)} \left\| \hat{\mathcal{H}}_i(\hat{k}, k, L, n) - \mathcal{H}_k \right\| = o_P\left(n^{-\frac{\delta}{2+\delta}}\right) + \mathcal{O}_P\left(L^{-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} + \frac{L \log \log n}{n}\right), \quad (3.2.170)$$

wobei bei Betrachtung von $\hat{\mathcal{H}}_1$ zusätzlich (3.2.119), (3.2.120) vorausgesetzt werden.

Beweis: Bei allen folgenden asymptotischen Aussagen im Beweis von Theorem 3.4 betrachten wir den Fall $n \rightarrow \infty$.

Beachte im Folgenden, dass für n hinreichend groß gilt: $n > 2L + 2p$.

Für $L < \hat{k} < n - (L + 1)$ gilt:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{n} X'_n X_n \frac{1}{n - 2p} \left(\hat{F}_{\hat{k}}(0) + \hat{F}_{\hat{k}}^*(0) \right) \\
 \stackrel{\text{Prop. 3.1, (3.2.15)}}{=} & \frac{1}{n} X'_n X_n \frac{1}{n - 2p} \xi'_n \xi_n + \mathcal{O}_P \left(\frac{\log \log n}{n} \right) \\
 \stackrel{\text{Prop. 3.2, (3.2.15)}}{=} & \frac{1}{n} X'_n X_n \gamma(0) + o_P \left(n^{-\frac{\delta}{2+\delta}} \right), \tag{3.2.171}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{h=1}^L \frac{L-h}{L(n-h)} X'_{n-h} X_{h+1,n} \frac{1}{n-2h-2p} \left(\hat{F}_{\hat{k}}(h) + \hat{F}_{\hat{k}}^*(h) \right) \\
 \stackrel{\text{Prop. 3.1, Prop. 3.3, (3.2.169)}}{=} & \sum_{h=1}^L \frac{L-h}{L} \frac{1}{n-h} X'_{n-h} X_{h+1,n} \gamma(h) + o_P \left(n^{-\frac{\delta}{2+\delta}} + \frac{1}{L} \right) \\
 & + \mathcal{O}_P \left(\frac{L \log \log n}{n} \right). \tag{3.2.172}
 \end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{h=1}^L \frac{L-h}{L(n-h)} X'_{n-h} X_{h+1,n} \gamma(h) - \sum_{h=1}^L \frac{1}{n-h} X'_{n-h} X_{h+1,n} \gamma(h) \right| \\
 \stackrel{\text{Bemerkung 3.1, (3.2.169)}}{=} & \mathcal{O}_P \left(\sum_{h=1}^{\left[L^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \right]} \frac{h^{-\varepsilon}}{L} + \sum_{h=\left[L^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \right]}^L \frac{h}{L} h^{-(1+\varepsilon)} \right) \\
 = & \mathcal{O}_P \left(L^{-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \right), \tag{3.2.173}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{h=1}^{\left[\frac{n}{2} \right]} \frac{1}{n-h} X'_{n-h} X_{h+1,n} \gamma(h) - \sum_{h=1}^L \frac{1}{n-h} X'_{n-h} X_{h+1,n} \gamma(h) \right| \\
 \stackrel{\text{Bem. 3.3}}{=} & \sum_{h=L+1}^{\left[\frac{n}{2} \right]} \frac{1}{n-h} X'_{n-h} X_{h+1,n} \sum_{j=1}^{\infty} a_j a_{j+h} \tau^2 \\
 \stackrel{(3.2.169)}{\leq} & \mathcal{O}_P \left(L^{-1} \right) \sum_{j=L+2}^{\infty} j |a_j| \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \\
 \stackrel{(3.2.12)}{=} & o_P \left(L^{-1} \right). \tag{3.2.174}
 \end{aligned}$$

Aus (3.2.171)-(3.2.174) folgt mit Lemma 7.6 und (3.2.34) (3.2.170) für $\hat{\mathcal{H}}_1$.

Sei $\hat{k} > \max(L + p, n - \hat{k})$. Dann gilt:

$$\frac{1}{n} X'_n X_n \frac{1}{\hat{k} - p} \hat{F}_{\hat{k}}(0) \stackrel{Prop. 3.1, Prop. 3.2, (3.2.15)}{=} \frac{1}{n} X'_n X_n \gamma(0) + o_P \left(\hat{k}^{\frac{-\delta}{2+\delta}} \right), \quad (3.2.175)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{h=1}^L \frac{1}{n-h} X'_{n-h} X_{h+1,n} \frac{1}{\hat{k} - h - p} \hat{F}_{\hat{k}}(h) \\ & \stackrel{Prop. 3.1, Prop. 3.3, (3.2.169)}{=} \sum_{h=1}^L \frac{1}{n-h} X'_{n-h} X_{h+1,n} \gamma(h) + o_P \left(n^{-\frac{\delta}{2+\delta}} + L^{-1} \right) \\ & + \mathcal{O}_P \left(\frac{L \log \log n}{n} \right). \end{aligned} \quad (3.2.176)$$

Für $\hat{k} < \min(n - L - p, n - \hat{k})$ erhalten wir analog:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} X'_n X_n \frac{1}{n - \hat{k} - p} \hat{F}_{\hat{k}}^*(0) \\ & \stackrel{Prop. 3.1, Prop. 3.2, (3.2.15)}{=} \frac{1}{n} X'_n X_n \gamma(0) + o_P \left((n - \hat{k})^{\frac{-\delta}{2+\delta}} \right), \end{aligned} \quad (3.2.177)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{h=1}^L \frac{1}{n-h} X'_{n-h} X_{h+1,n} \frac{1}{n - \hat{k} - h - p} \hat{F}_{\hat{k}}^*(h) \\ & \stackrel{Prop. 3.1, Prop. 3.3, (3.2.169)}{=} \sum_{h=1}^L \frac{1}{n-h} X'_{n-h} X_{h+1,n} \gamma(h) + o_P \left(n^{-\frac{\delta}{2+\delta}} + L^{-1} \right) \\ & + \mathcal{O}_P \left(\frac{L \log \log n}{n} \right). \end{aligned} \quad (3.2.178)$$

Aus (3.2.173)-(3.2.178) folgt mit Lemma 7.6 und (3.2.34) (3.2.170) für $\hat{\mathcal{H}}_2$. \square

Korollar 3.3. Es gelte H_0 . Weiter seien (3.2.5)-(3.2.20) erfüllt und es gelte:

$$L = L(n), \quad \frac{n}{L(\log \log n)^3} \rightarrow \infty, \quad \frac{L^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}}{(\log \log n)^2} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty), \quad p \leq \hat{k} \leq n - p. \quad (3.2.179)$$

Dann folgt für $i = 1, 2$:

$$\max_{p \leq k \leq n-p} \frac{n}{k(n-k)} \left| \hat{\mathcal{H}}_i(\hat{k}, k, L, n) - \mathcal{H}_k \right| = o_P \left((\log \log n)^{-2} \right) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.2.180)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(a(\log n) T_1^*(n)^{\frac{1}{2}} \leq t + d_p(\log n) \right) = \exp(-2 \exp(-t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (3.2.181)$$

wobei a, d_p wie in Theorem 2.7 definiert sind. Der in T_1^* verwendete Schätzer für \mathcal{H}_k sei einer der beiden Schätzer $\hat{\mathcal{H}}_1(\hat{k}, k, L, n), \hat{\mathcal{H}}_2(\hat{k}, k, L, n)$. Bei Betrachtung von $\hat{\mathcal{H}}_1$ werden zusätzlich (3.2.119), (3.2.120) vorausgesetzt.

Beweis: (3.2.180) folgt aus Theorem 3.4. (3.2.181) folgt aus Theorem 3.1 und (3.2.180) mit Bemerkung 3.11. \square

Theorem 3.5. *Es gelte H_A . Weiter seien (3.2.5)-(3.2.20) erfüllt, und es gelte:*

$$L < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, L := L(n) \rightarrow \infty, L = o(n) \ (n \rightarrow \infty), p \leq \hat{k} \leq n - p. \quad (3.2.182)$$

Dann folgt für $i=1,2$, $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} & \max_{p \leq k \leq n-p} \frac{n}{k(n-k)} \left| \hat{\mathcal{H}}_i(\hat{k}, k, L, n) - \mathcal{H}_k \right| \\ &= o_P \left(n^{-\frac{\delta}{2+\delta}} \right) + \mathcal{O}_P \left(\frac{L}{n} \left(\log \log n + \left| \hat{k} - k^* \right| \dot{\delta}' \dot{\delta} \right) + L^{-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \right), \end{aligned}$$

wobei $\dot{\delta} := \beta - \beta^*$.

Bei Betrachtung von $\hat{\mathcal{H}}_1$ werden zusätzlich (3.2.119), (3.2.120) vorausgesetzt.

Beweis: Sei $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq n$, $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n$, $0 \leq h \leq n$, $1 < k^* < n$.

Sei weiter $X_{k_1, k_2}^{(i_1, i_2)} \in \mathbb{R}^{(k_2 - k_1 + 1) \times p}$ die Matrix, die aus X_{k_1, k_2} entsteht, indem die ersten $\min((i_1 - k_1 + 1)_+, k_2 - k_1 + 1)$ und die letzten $\min((k_2 - i_2)_+, k_2 - k_1 + 1)$ Zeilen mit 0 besetzt werden. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & Y_{k_1, k_2} - X_{k_1, k_2} \hat{\beta}_k \\ &= X_{k_1, k_2}^{(0, k^*)} \beta + X_{k_1, k_2}^{(k^*, 0)} \beta^* + \xi_{k_1, k_2} \\ & \quad - X_{k_1, k_2} \left(\beta - (X_k' X_k)^{-1} X_{k^*+1, k}' X_{k^*+1, k} \dot{\delta} + (X_k' X_k)^{-1} X_k' \xi_k \right) \\ &= \xi_{k_1, k_2} - X_{k_1, k_2} (X_k' X_k)^{-1} X_k' \xi_k - X_{k_1, k_2}^{(k^*, 0)} \dot{\delta} \\ & \quad + X_{k_1, k_2} (X_k' X_k)^{-1} X_{k^*+1, k}' X_{k^*+1, k} \dot{\delta}, \end{aligned} \quad (3.2.183)$$

$$\begin{aligned} & Y_{k_1, k_2} - X_{k_1, k_2} \hat{\beta}_k^* \\ &= X_{k_1, k_2}^{(0, k^*)} \beta + X_{k_1, k_2}^{(k^*, 0)} \beta^* + \xi_{k_1, k_2} \\ & \quad - X_{k_1, k_2} \left(\beta^* + (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} X_{k+1, k^*}' X_{k+1, k^*} \dot{\delta} + (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} X_k^{*'} \xi_k^* \right) \\ &= \xi_{k_1, k_2} - X_{k_1, k_2} (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} X_k^{*'} \xi_k^* + X_{k_1, k_2}^{(0, k^*)} \dot{\delta} - \\ & \quad X_{k_1, k_2} (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} X_{k+1, k^*}' X_{k+1, k^*} \dot{\delta}. \end{aligned} \quad (3.2.184)$$

Damit erhalten wir für $0 \leq h < k$:

$$\begin{aligned} \hat{F}_k(h) &= \left(\xi_{k-h} - X_{k-h} (X_k' X_k)^{-1} X_k' \xi_k - X_{k-h}^{(k^*, 0)} \dot{\delta} \right. \\ & \quad \left. + X_{k-h} (X_k' X_k)^{-1} X_{k^*+1, k}' X_{k^*+1, k} \dot{\delta} \right)' \\ & \quad \left(\xi_{h+1, k} - X_{h+1, k} (X_k' X_k)^{-1} X_k' \xi_k - X_{h+1, k}^{(k^*, 0)} \dot{\delta} \right. \\ & \quad \left. + X_{h+1, k} (X_k' X_k)^{-1} X_{k^*+1, k}' X_{k^*+1, k} \dot{\delta} \right) \end{aligned} \quad (3.2.185)$$

und für $0 \leq h < n - k$:

$$\begin{aligned} \hat{F}_k^*(h) &= \left(\xi_{k+1,n-h} - X_{k+1,n-h} (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} X_k^{*'} \xi_k^* + X_{k+1,n-h}^{(0,k^*)} \dot{\delta} \right. \\ &\quad \left. - X_{k+1,n-h} (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} X_{k+1,k^*}' X_{k,k^*} \dot{\delta} \right)' \\ &\quad \left(\xi_{k+h+1,n} - X_{k+h+1,n} (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} X_k^{*'} \xi_k^* + X_{k+h+1,n}^{(0,k^*)} \dot{\delta} \right. \\ &\quad \left. - X_{k+h+1,n} (X_k^{*'} X_k^*)^{-1} X_{k+1,k^*}' X_{k+1,k^*} \dot{\delta} \right). \end{aligned} \quad (3.2.186)$$

Mit (3.2.185), Korollar 3.2, (3.2.20), (3.2.32), Lemma 7.4 erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\max_{0 \leq h < \hat{k}} \left| \hat{F}_{\hat{k}}^*(h) - \xi_{\hat{k}-h}' \xi_{h+1,\hat{k}} \right| \\ &= \mathcal{O}_P \left(\log \log n + \left(|\hat{k} - k^*| \log \log \left(|\hat{k} - k^*| \right) \right)^{\frac{1}{2}} \|\dot{\delta}\| + |\hat{k} - k^*| \dot{\delta}' \dot{\delta} \right) \\ &= \mathcal{O}_P \left(\log \log n + |\hat{k} - k^*| \dot{\delta}' \dot{\delta} \right) \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (3.2.187)$$

und analog für $n \rightarrow \infty$:

$$\max_{0 \leq h < n - \hat{k}} \left| \hat{F}_{\hat{k}}^*(h) - \xi_{\hat{k}+1,n-h}' \xi_{\hat{k}+h+1,n} \right| = \mathcal{O}_P \left(\log \log n + |\hat{k} - k^*| \dot{\delta}' \dot{\delta} \right). \quad (3.2.188)$$

Analog zum Beweis von Theorem 3.4 folgt die Behauptung aus (3.2.187), (3.2.188) mit den Propositionen 3.2 sowie 3.3. \square

Korollar 3.4. *Es gelte H_A und die Bedingungen (3.2.5)-(3.2.20), (3.2.23), (3.2.24), (3.2.182) seien erfüllt. Weiter gelte:*

$$\frac{L}{n} |\hat{k} - k^*| \dot{\delta}' \dot{\delta} = o_P(1) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.2.189)$$

$$\frac{n}{L \log \log n} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.2.190)$$

Dann folgt:

$$\max_{p \leq k \leq n-p} \frac{n}{k(n-k)} \left| \hat{\mathcal{H}}_i(\hat{k}, k, L, n) - \mathcal{H}_k \right| = o_P(1) \quad (i=1,2, n \rightarrow \infty), \quad (3.2.191)$$

$$\frac{T_1^*(n)}{\log \log n} \xrightarrow{P} \infty \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.2.192)$$

wobei als Schätzer für \mathcal{H}_k in T_1^* einer der Schätzer $\hat{\mathcal{H}}_1(\hat{k}, k, L, n)$, $\hat{\mathcal{H}}_2(\hat{k}, k, L, n)$ gewählt sei. Bei Betrachtung von $\hat{\mathcal{H}}_1$ werden zusätzlich (3.2.119), (3.2.120) vorausgesetzt.

Beweis: (3.2.191) folgt aus Theorem 3.5. (3.2.192) folgt aus Theorem 3.2 mit (3.2.191) und Bemerkung 3.12. \square

Bemerkung 3.17.

Gelte $L \dot{\delta}' \dot{\delta} = \mathcal{O}(1) \quad (n \rightarrow \infty)$.

Dann ist unter den Voraussetzungen von Theorem 3.3 (3.2.189) für den Schätzer

$$\hat{k} := \inf \left\{ k \mid (\beta_k - \beta_k^*)' H_k^{-1} (\beta_k - \beta_k^*) = \max_{p \leq k \leq n-p} (\beta_k - \beta_k^*)' H_k^{-1} (\beta_k - \beta_k^*) \right\}$$

erfüllt.

Beweis: Folgt unmittelbar mit Theorem 3.3. □

3.2.7 Simulationen

Im Rahmen eines Fortgeschrittenenpraktikums an der Philipps-Universität Marburg wurden bereits Simulationen zur a posteriori Changepoint-Analyse in linearen Modellen mit korrelierten Fehlertermen durchgeführt (vgl. [BaVo01]). Die Untersuchungen beschränken sich allerdings auf den eindimensionalen Fall ($p = 1$). Wir stellen hier Simulationsstudien für den Fall $p = 2$ vor.

Bei der Konstruktion einer Matrizenfolge $\{X_k\}_{1 \leq k \leq n}$ gehen wir wie folgt vor:

Ausgehend von einer Matrix

$$\tilde{X}_n := \begin{pmatrix} 1.3 & 1.25 \\ 1.25 & 2.2 \\ 1.1 & 2.275 \\ 1.2 & 2.25 \\ \vdots & \\ 1.3 & 1.25 \\ 1.25 & 2.2 \\ 1.1 & 2.275 \\ 1.2 & 2.25 \\ \vdots & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 2}$$

erzeugen wir eine Folge von "Störmatrizen" $\{S_k\}_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{k \times 2}$, für die gilt:

$$S_k \stackrel{P-f.s.}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$

und definieren

$$X_k := \tilde{X}_k + S_k,$$

wobei $\tilde{X}_k \in \mathbb{R}^{k \times 2}$ aus den ersten k Zeilen der Matrix \tilde{X}_n besteht.

Die in den Matrizen S_k auftretenden zufälligen Fehler werden durch standardnormalverteilte Zufallsvariablen erzeugt.

Bei allen Simulationsläufen betrachten wir das in Abschnitt 3.2.1 vorgestellte Modell mit folgenden Parametern:

$$\begin{aligned} n &= 100, \\ L &= 5, 10, 20, \\ p &= 2, \\ \beta &= (1, 2)', \\ k^* &= 67 \text{ bzw. } k^* = 100, \text{ falls kein Changepoint vorliegt.} \end{aligned}$$

Der Fehlerprozess $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ wird als Folge von i.i.d. standardnormalverteilten Zufallsvariablen bzw. als AR(1)-Prozess vorausgesetzt:

$$\varepsilon_i = \phi \varepsilon_{i-1} + \tilde{\varepsilon}_i,$$

wobei $\{\tilde{\varepsilon}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ i.i.d., $\tilde{\varepsilon}_1 \sim N(0, 1)$.

3.2.7.1 Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints

Bei unseren Simulationen bezüglich des Schätzers für den Zeitpunkt des Changepoints gehen wir so vor, dass wir 1000 Simulationsläufe mit den oben angegebenen Parametern realisieren. Den Zeitpunkt des Changepoints schätzen wir mit dem in Abschnitt 3.2.2.2 definierten Schätzer \hat{k} . In den folgenden Abbildungen 8-15 sind die Schätzer über die 1000 Simulationsläufe dargestellt.

Es lässt sich feststellen, dass der Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints für den Fall, dass kein Changepoint vorliegt, erwartungsgemäß zufälligen Schwankungen unterliegt. Es kann keine Tendenz zu einem bestimmten Wert festgestellt werden (vgl. Abbildungen 8, 11). Für den Fall der Alternative zeigt sich, dass der Schätzer bei Wahl von $\beta^* = (2, 3)'$ gute Ergebnisse für Beobachtungen mit niedrigen und mittleren Korrelationen ($0 \leq \phi \leq 0.7$) liefert. Der Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints liegt stabil in der Nähe des tatsächlichen Changepoints. Für hohe Korrelationen ($\phi=0.9$) verhält sich der Schätzer allerdings sehr unregelmäßig (vgl. Abbildung 14). Wir haben für $\phi=0.9$ eine weitere Simulation mit einer größeren "Sprunghöhe" im Changepoint ($\beta^* = (3, 4)'$) durchgeführt. Hier zeigt der Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints ein stabileres Verhalten (vgl. Abbildung 15).

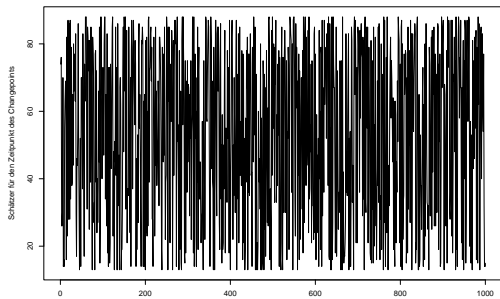


Abbildung 8: $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d., kein Changepoint.

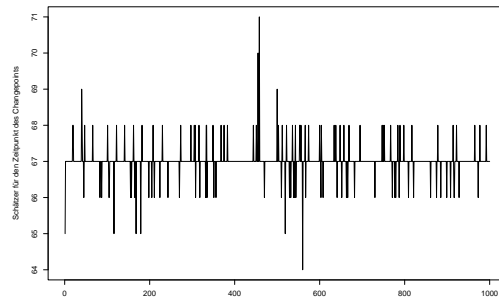


Abbildung 9: $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d., Changepoint, $\beta^* = (2, 3)'$.

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

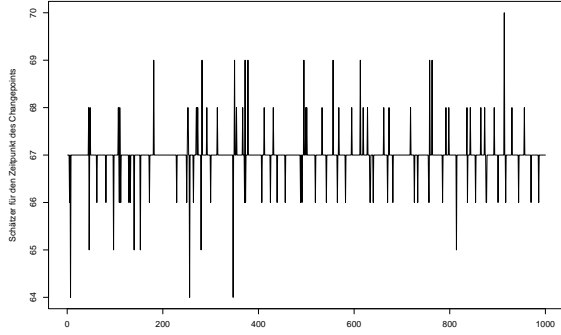


Abbildung 10: $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.1$,
Changepoint, $\beta^* = (2, 3)'$.

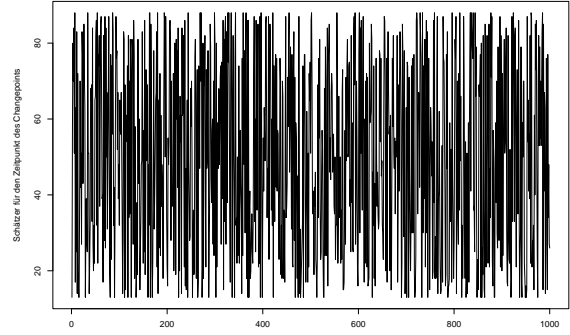


Abbildung 11: $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.5$, kein
Changepoint.

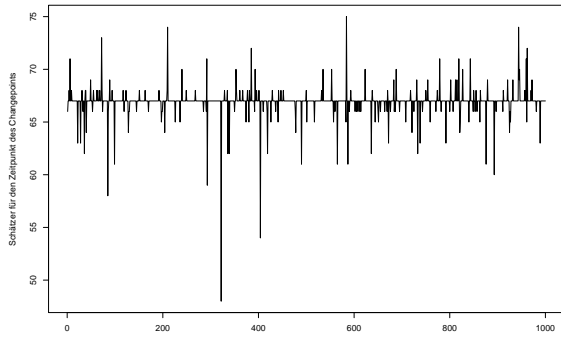


Abbildung 12: $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.5$,
Changepoint, $\beta^* = (2, 3)'$.

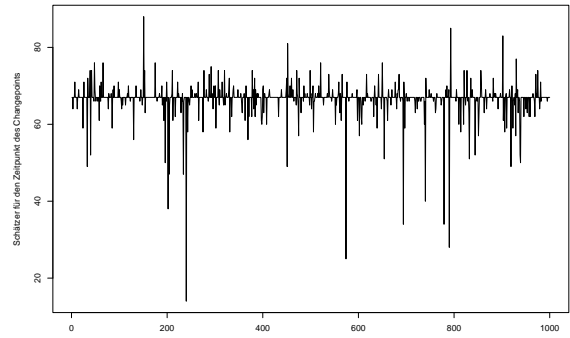


Abbildung 13: $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.7$,
Changepoint, $\beta^* = (2, 3)'$.

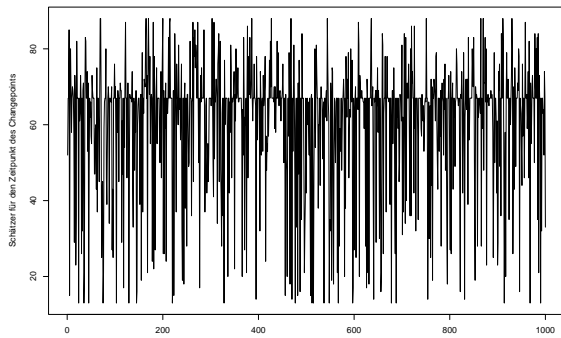


Abbildung 14: $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.9$,
Changepoint, $\beta^* = (2, 3)'$.

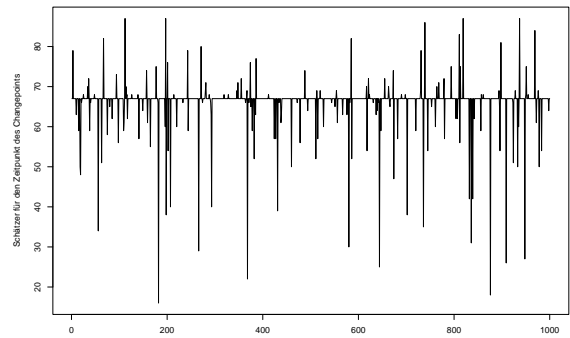


Abbildung 15: $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.9$,
Changepoint, $\beta^* = (3, 4)'$.

3.2.7.2 Verhalten der Teststatistik

Zum Vergleich des Verhaltens der Teststatistik T_1^* mit den in den Theoremen 3.1 bzw. 3.2 formulierten asymptotischen Aussagen werden jeweils 1000 Simulationsläufe mit $n=100$ Beobachtungen durchgeführt. Dazu werden über die 1000 Simulationen die relativen Häufigkeiten bestimmt, mit denen gilt:

$$a(\log n)T_1^*(n)^{\frac{1}{2}} \leq t + d_p(\log n),$$

wobei $t \in [-1, 6]$. Diese relativen Häufigkeiten werden verglichen mit der Gumbel-Verteilungsfunktion:

$$G(t) = \exp(-2 \exp(-t)).$$

Dabei wird zur Berechnung der Teststatistik T_1^* einer der beiden Schätzer $\hat{\mathcal{H}}_1, \hat{\mathcal{H}}_2$ verwendet.

Es zeigt sich, dass für den Fall der Nullhypothese für Beobachtungen mit niedrigen und mittleren Korrelationen ($0 \leq \phi \leq 0.7$) die Gumbel-Verteilung eine gute Approximation an die simulierten relativen Häufigkeiten im Sinne von Theorem 3.1 liefert. Für hohe Korrelationen ($\phi=0.9$) treten allerdings deutliche Abweichungen auf (vgl. Abbildungen 24 - 26). Die simulierten relativen Häufigkeiten liegen deutlich unterhalb der Gumbel-Verteilungsfunktion. Das heißt, die Teststatistik nimmt höhere Werte an als die asymptotische Aussage aus Theorem 3.1 erwarten läßt. Bei hohen Korrelationen erhält man etwas bessere Approximationen, wenn man den Parameter L relativ hoch ($L=10, 20$) wählt. Für den Fall der Alternative liefern die Simulationen für $\beta^* = (2, 3)'$ ebenfalls gute Ergebnisse für niedrige und mittlere Korrelationen. Die ermittelten relativen Häufigkeiten sind sehr niedrig, teilweise sogar gleich null (vgl. Abbildungen 17, 19, 21). Für den Fall hoher Korrelationen ($\phi = 0.9$) ist das Ergebnis nicht zufriedenstellend. Die ermittelten relativen Häufigkeiten sind zu hoch (vgl. Abbildungen 27- 29). Der Unterschied zum Fall der Nullhypothese fällt zu gering aus. Wählt man die "Sprunghöhe" im Changepoint größer ($\beta^* = (3, 4)'$ bzw. $\beta^* = (4, 5)'$), so erhält man bessere Ergebnisse (vgl. Abbildung 30 und Abbildung 31).

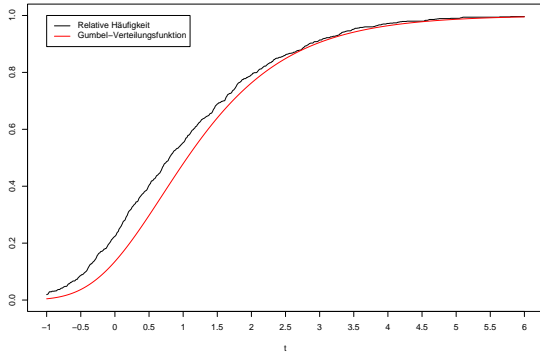


Abbildung 16: T_1^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d., kein Changepoint, Schätzer $\hat{\mathcal{H}}_1$, $L=5$.

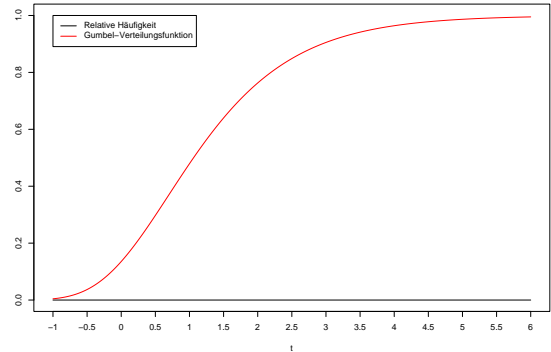


Abbildung 17: T_1^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d., Changepoint, $\beta^* = (2, 3)'$, $\hat{\mathcal{H}}_1$, $L=5$.

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

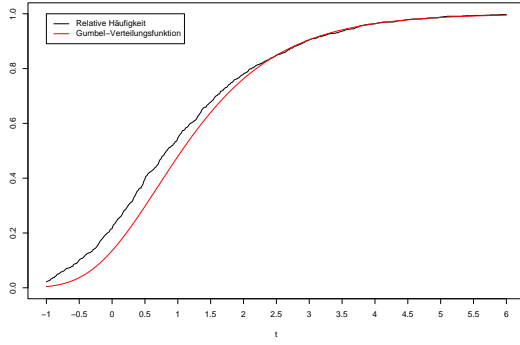


Abbildung 18: T_1^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.1$, kein Changepoint, $\hat{\mathcal{H}}_2$, $L=5$.

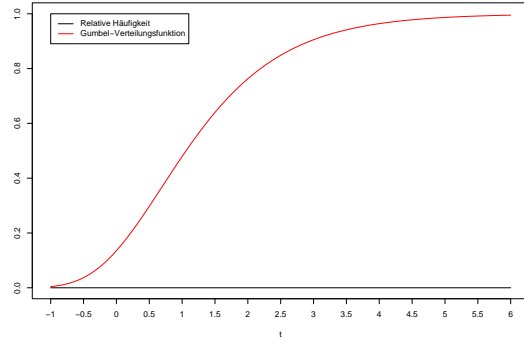


Abbildung 19: T_1^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.1$, Changepoint, $\beta^* = (2, 3)'$, $\hat{\mathcal{H}}_2$, $L=5$.

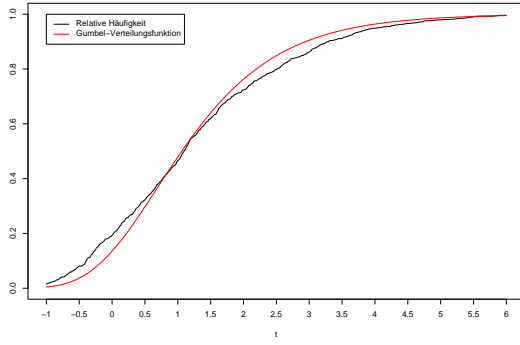


Abbildung 20: T_1^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.5$, kein Changepoint, $\hat{\mathcal{H}}_1$, $L=5$.

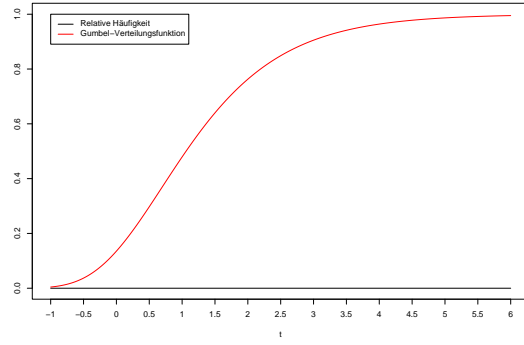


Abbildung 21: T_1^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.5$, Changepoint, $\beta^* = (2, 3)'$, $\hat{\mathcal{H}}_1$, $L=5$.

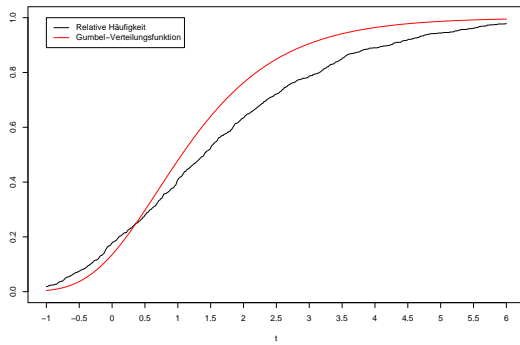


Abbildung 22: T_1^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.7$, kein Changepoint, $\hat{\mathcal{H}}_2$, $L=5$.

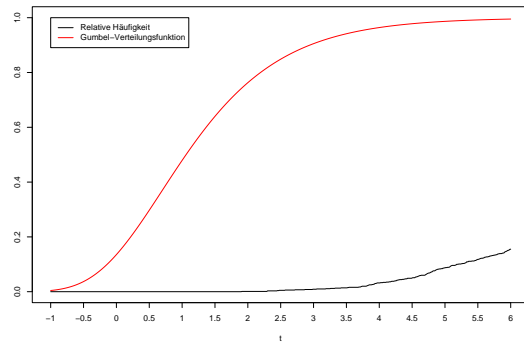


Abbildung 23: T_1^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.7$, Changepoint, $\beta^* = (2, 3)'$, $\hat{\mathcal{H}}_2$, $L=5$.

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

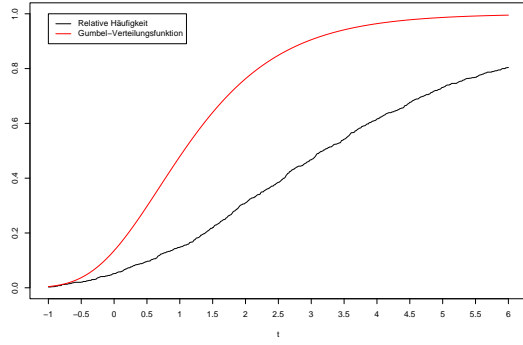


Abbildung 24: T_1^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.9$, kein Changepoint, $\hat{\mathcal{H}}_1$, $L=5$.

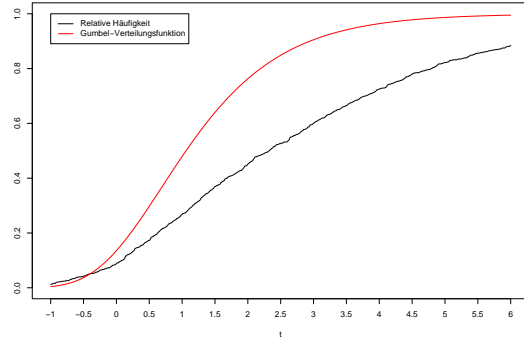


Abbildung 25: T_1^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.9$, kein Changepoint, $\hat{\mathcal{H}}_1$, $L=10$.

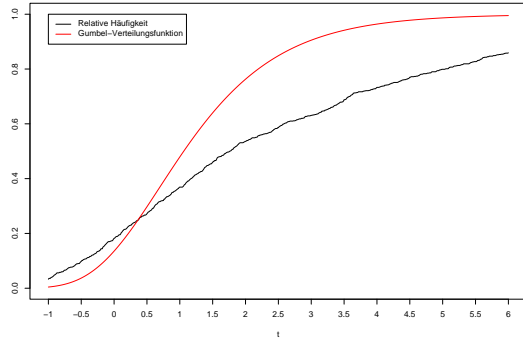


Abbildung 26: T_1^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.9$, kein Changepoint, $\hat{\mathcal{H}}_1$, $L=20$.

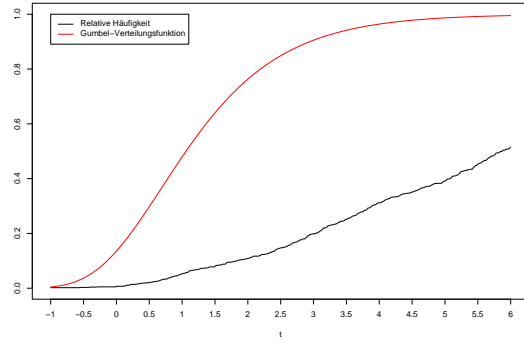


Abbildung 27: T_1^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.9$, $\beta^* = (2, 3)'$, Changepoint, $\hat{\mathcal{H}}_1$, $L=5$.

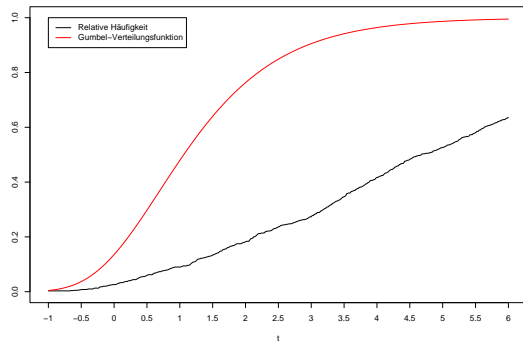


Abbildung 28: T_1^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.9$, Changepoint, $\beta^* = (2, 3)'$, $\hat{\mathcal{H}}_1$, $L=10$.

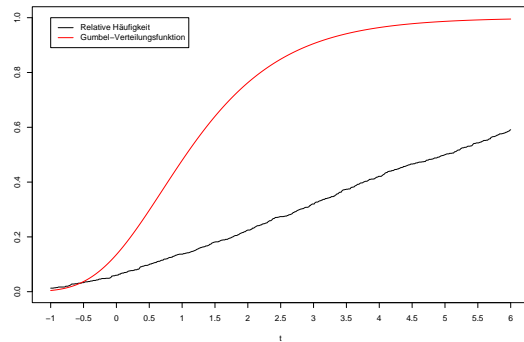


Abbildung 29: T_1^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.9$, Changepoint, $\beta^* = (2, 3)'$, $\hat{\mathcal{H}}_1$, $L=20$.

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

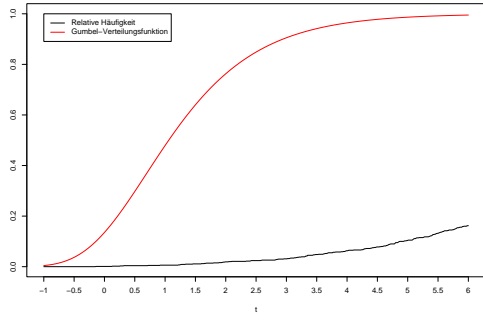


Abbildung 30: T_1^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.9$,
Changepoint, $\beta^* = (3, 4)'$,
 $\hat{\mathcal{H}}_1$, $L=10$.

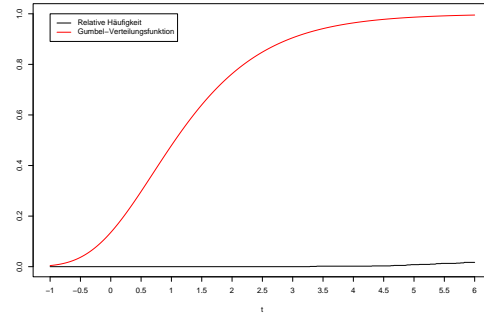


Abbildung 31: T_1^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.9$,
Changepoint, $\beta^* = (4, 5)'$,
 $\hat{\mathcal{H}}_1$, $L=10$.

In der folgenden Tabelle vergleichen wir die 0.9-, 0.95-, 0.99-Quantile der Gumbel-Verteilung mit den ermittelten relativen Häufigkeiten, für die unter der H_0 gilt:

$$a(\log n)T_1^*(n)^{\frac{1}{2}} \leq t + d_p(\log n),$$

wobei t so gewählt ist, dass gilt: $\exp(-2 \exp(-t)) = 0.9 (0.95, 0.99)$.

t	2.943515	3.663341	5.2933
$\exp(-2 \exp(-t))$	0.9	0.95	0.99
$\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d., $L=5$, $\hat{\mathcal{H}}_1$	0.9908	0.96	0.994
$\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d., $L=5$, $\hat{\mathcal{H}}_2$	0.907	0.951	0.992
$\phi = 0.1$, $L=5$, $\hat{\mathcal{H}}_1$	0.909	0.954	0.993
$\phi = 0.1$, $L=5$, $\hat{\mathcal{H}}_2$	0.899	0.945	0.991
$\phi = 0.5$, $L=5$, $\hat{\mathcal{H}}_1$	0.854	0.926	0.985
$\phi = 0.5$, $L=5$, $\hat{\mathcal{H}}_2$	0.863	0.92	0.98
$\phi = 0.7$, $L=5$, $\hat{\mathcal{H}}_1$	0.797	0.866	0.958
$\phi = 0.7$, $L=5$, $\hat{\mathcal{H}}_2$	0.78	0.87	0.955
$\phi = 0.9$, $L=5$, $\hat{\mathcal{H}}_1$	0.46	0.571	0.754
$\phi = 0.9$, $L=5$, $\hat{\mathcal{H}}_2$	0.484	0.581	0.751
$\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d., $L=10$, $\hat{\mathcal{H}}_1$	0.9	0.948	0.991
$\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d., $L=10$, $\hat{\mathcal{H}}_2$	0.896	0.948	0.987
$\phi = 0.1$, $L=10$, $\hat{\mathcal{H}}_1$	0.903	0.939	0.985
$\phi = 0.1$, $L=10$, $\hat{\mathcal{H}}_2$	0.895	0.933	0.982
$\phi = 0.5$, $L=10$, $\hat{\mathcal{H}}_1$	0.885	0.942	0.982
$\phi = 0.5$, $L=10$, $\hat{\mathcal{H}}_2$	0.87	0.928	0.981
$\phi = 0.7$, $L=10$, $\hat{\mathcal{H}}_1$	0.84	0.893	0.961
$\phi = 0.7$, $L=10$, $\hat{\mathcal{H}}_2$	0.828	0.881	0.952
$\phi = 0.9$, $L=10$, $\hat{\mathcal{H}}_1$	0.593	0.685	0.838
$\phi = 0.9$, $L=10$, $\hat{\mathcal{H}}_2$	0.599	0.679	0.83

$\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d., $L=20$, $\hat{\mathcal{H}}_1$	0.82	0.88	0.952
$\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d., $L=20$, $\hat{\mathcal{H}}_2$	0.824	0.869	0.942
$\phi = 0.1$, $L=20$, $\hat{\mathcal{H}}_1$	0.817	0.866	0.944
$\phi = 0.1$, $L=20$, $\hat{\mathcal{H}}_2$	0.819	0.875	0.929
$\phi = 0.5$, $L=20$, $\hat{\mathcal{H}}_1$	0.777	0.837	0.919
$\phi = 0.5$, $L=20$, $\hat{\mathcal{H}}_2$	0.78	0.85	0.927
$\phi = 0.7$, $L=20$, $\hat{\mathcal{H}}_1$	0.766	0.831	0.903
$\phi = 0.7$, $L=20$, $\hat{\mathcal{H}}_2$	0.76	0.812	0.89
$\phi = 0.9$, $L=20$, $\hat{\mathcal{H}}_1$	0.628	0.713	0.816
$\phi = 0.9$, $L=20$, $\hat{\mathcal{H}}_2$	0.629	0.69	0.807

3.2.7.3 Schlussfolgerungen aus den Simulationsstudien

In den Simulationsstudien können wir für eine relativ niedrige Anzahl von Beobachtungen ($n=100$) die theoretisch asymptotisch erzielten Resultate für Beobachtungen mit niedrigen und mittleren Korrelationen ($0 \leq \phi \leq 0.7$) bestätigen. Dies gilt sowohl für den betrachteten Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints als auch für die Approximation von relativen Häufigkeiten, mit denen die Teststatistik T_1^* Schwellwerte überschreitet, durch die Gumbel-Verteilungsfunktion. Für hohe Korrelationen (z.B. $\phi = 0.9$) liefert der Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints für den Fall der Alternative nur dann gute Resultate, wenn ein "relativ hoher" Changepoint vorliegt. Gleiches gilt für das Verhalten von T_1^* für den Fall der Alternative. Für den Fall der Nullhypothese leistet die Gumbel-Verteilungsfunktion bei $\phi = 0.9$ keine gute Approximation an die ermittelten relativen Häufigkeiten. Die Teststatistik liefert im Vergleich zu den theoretisch asymptotisch hergeleiteten Ergebnissen zu hohe Werte.

Die Tatsache, dass umso höher die Korrelationen der Beobachtungen liegen, desto "höher" ein Changepoint ausfallen muss, um für den Fall der Alternative "gute" Aussagen bezüglich des Schätzers für den Zeitpunkt des Changepoints bzw. das Verhalten der Teststatistik zu erhalten, ist einsichtig zu begründen. Die Varianz der Beobachtungen ist für korrelierte Beobachtungen höher. Dies hat zur Folge, dass die Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints stärkeren Schwankungen unterliegen. Die Teststatistik wird stets in gewisser Weise durch die Varianz der Beobachtungen normiert (hier durch die Matrizen \mathcal{H}_k bzw. $\hat{\mathcal{H}}_1, \hat{\mathcal{H}}_2$). Je höher die Varianz der Beobachtungen ist, desto geringer ist der durch den Changepoint resultierende Unterschied der Teststatistik im Vergleich zur Nullhypothese.

Wir empfehlen, bei Anwendung der beschriebenen Union-Intersection Teststatistik auf Beobachtungen ($n \approx 100$) mit hohen Korrelationen die Fehlerwahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art (Nullhypothese wird verworfen, obwohl kein Changepoint vorliegt) "klein" zu wählen, z.B. $\alpha = 0.01$. Die Wahl des Parameters L , der bestimmt, bis zu welchem "lag" die Autokovarianzfunktion zur Schätzung der Kovarianzmatrix der Teststatistik T_1^* berücksichtigt wird, sollte in Abhängigkeit davon gewählt werden, wie hoch die Korrelationen der Beobachtungen sind. Bei 100 Beobachtungen empfehlen wir bei einer AR(1)-Zeitreihe mit niedriger bis mittlerer Korrelation ($0 < \phi \leq 0.7$) eine Wahl von L zwischen 3 und 10. Für höhere Korrelationen empfehlen wir eine Wahl von

L zwischen 10 und 20.

Zu weiteren Einzelheiten bezüglich der praktischen Anwendung des Union-Intersection Tests vgl. [Gie02a].

3.3 A posteriori Changepoint-Analyse in linearen Modellen für abrupte Changepoints im Fehlerprozess

Die in Abschnitt 3.2 verwendete Union-Intersection Teststatistik testet auf Veränderungen des Regressionsvektors, der in dem linearen Modell das Gewicht der einzelnen Einflussgrößen bestimmt. In praktischen Anwendungen kann es sinnvoll sein, nicht auf Veränderungen des Regressionsvektors, sondern auf Veränderungen des Fehlerprozesses zu testen.

3.3.1 Modell

Wir betrachten in diesem Abschnitt das folgende Modell:

$$y_i := \begin{cases} x_i' \beta + \varepsilon_i & , 1 \leq i \leq k^*, \\ x_i' \beta + \varepsilon_i + \delta & , k^* < i \leq n. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

β ist ein zu schätzender p -dimensionaler Regressionsvektor.

$\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge zentrierter Zufallsvariablen, die den Fehlerprozess beschreibt.

$\delta \neq 0$ ist die "Sprunghöhe" des Fehlerprozesses im Changepoint.

k^* ist der Zeitpunkt des Changepoints.

$x_i := (x_{i,1}, \dots, x_{i,p})'$ sind p -dimensionale Zufallsvektoren, die Einflussgrößen zum Zeitpunkt i beschreiben.

Die x_i unterliegen zufälligen Schwankungen, d.h. für alle $i \in \mathbb{N}$ gibt es einen deterministischen Vektor $\tilde{x}_i \in \mathbb{R}^p$ und einen p -dimensionalen Zufallsvektor η_i , so dass gilt: $x_i = \tilde{x}_i + \eta_i$.

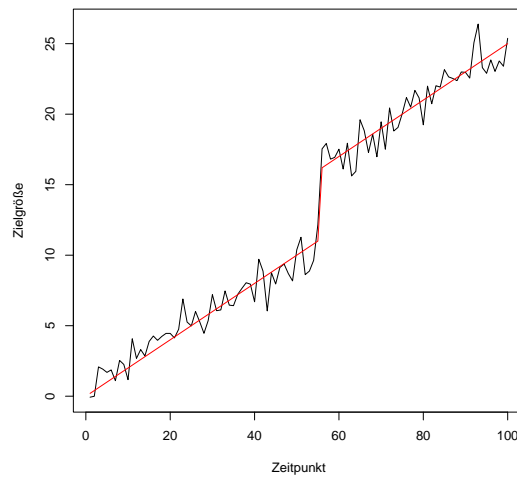


Abbildung 32: Abrupter Changepoint im Fehlerprozess zum Zeitpunkt 55.

Getestet wird die Hypothese

$$H_0 : k^* = n$$

gegen die Alternative

$$H_A : 1 \leq k^* < n.$$

Wir kommen in diesem Abschnitt auf eine Reihe von Regularitätsvoraussetzungen und Bezeichnungen des vorangegangenen Abschnitts zurück. So werden im gesamten Abschnitt 3.3 für $\{\eta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ die Bedingungen (3.2.6)-(3.2.9) vorausgesetzt. Ebenso greifen wir auf die Bedingungen (3.2.13)-(3.2.20) zurück.

An die $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ stellen wir leicht modifizierte Forderungen. Neben der Mischungsbedingung (3.2.5) setzen wir voraus:

$$\varepsilon_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \tilde{\varepsilon}_{i-j}, \quad a_j \in \mathbb{R}, \quad (3.3.2)$$

$$a_k = \mathcal{O}(k^{-\beta}), \text{ wobei } \beta > \frac{3}{2}, \quad (3.3.3)$$

$$\{\tilde{\varepsilon}_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \text{ i.i.d. mit } E \tilde{\varepsilon}_1 = 0, 0 < \tau^2 := E \tilde{\varepsilon}_1^2, \quad (3.3.4)$$

$$\text{es gibt ein } 0 < \delta < 1 : E |\tilde{\varepsilon}_i|^{2+\delta} < \infty.$$

$$\text{Für } g(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, z \in \mathbb{C} \text{ gilt: } g(z) \neq 0 \text{ für alle } |z| \leq 1. \quad (3.3.5)$$

Die $\tilde{\varepsilon}_i$ haben eine Dichtefunktion f , und es gilt:

$$\sup_{-\infty < s < \infty} \frac{1}{|s|} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t+s) - f(t)| dt < \infty. \quad (3.3.6)$$

Bemerkung 3.18. Aus (3.3.2)-(3.3.4) folgt, dass der Prozess $\{\tilde{\varepsilon}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ eine kausale Zeitreihe ist.

Bemerkung 3.19. Aus (3.3.2)-(3.3.4) folgt, dass der Prozess $\{\tilde{\varepsilon}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ die Bedingungen (3.2.2)-(3.2.4) erfüllt. Insbesondere gilt: $\sigma^2 := \text{Var } \varepsilon_1 = \tau^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2$.

Bemerkung 3.20. (3.3.6) ist insbesondere erfüllt, falls die Dichtefunktion f stetig ist.

Bemerkung 3.21. Sei $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ ein kausaler $AR(1)$ -Prozess mit $|\phi_1| < 1$ wie in Beispiel 3.1, wobei die $\tilde{\varepsilon}_i$ eine stetige Dichtefunktion besitzen. Dann sind die Bedingungen (3.2.5) sowie (3.3.2)-(3.3.6) erfüllt.

Beweis: Vgl. Beispiel 3.1. □

Bemerkung 3.22. Aus (3.3.2)-(3.3.6) erhalten wir das folgende Invarianzprinzip: Es gibt eine Folge $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d. normalverteilter zentrierter Zufallsvariablen mit $\text{Var } Z_1 = \sigma^2$, so dass gilt:

$$\left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i - \sum_{i=1}^n Z_i \right| \stackrel{P-f.s.}{=} o\left(n^{\frac{1}{2}-\lambda}\right) \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{für ein } \lambda > 0.$$

Beweis: S. [Hor97], Lemma 2.2. □

Wir betrachten in diesem Abschnitt die folgende Teststatistik:

$$T_2(n) := \frac{1}{\sigma} \max_{1 \leq k < n} \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^k (y_i - x'_i \hat{\beta}_n) - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - x'_i \hat{\beta}_n) \right)$$

bzw.

$$T_2^*(n) := \frac{1}{\hat{\sigma}} \max_{1 \leq k < n} \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^k (y_i - x'_i \hat{\beta}_n) - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - x'_i \hat{\beta}_n) \right),$$

wobei $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(n)$ ein Schätzer für die Standardabweichung σ von ε_1 sei.

Bemerkung 3.23. Da die Teststatistik T_2 (T_2^*) auf Abweichungen zwischen Beobachtungen und (geschätzten) Modellwerten, d.h. auf Residuen basiert, wird sie auch als Residuen-Teststatistik bezeichnet.

3.3.2 Asymptotisches Verhalten der Teststatistik

Theorem 3.6. Gelte H_0 , (3.2.5)-(3.2.9), (3.2.13)-(3.2.20), (3.3.1)-(3.3.6).

Weiter gelte für $n \rightarrow \infty$:

$$\max_{1 \leq k < n} \left(\frac{1}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{n-k}{n} \sum_{i=1}^k x'_i - \frac{k}{n} \sum_{i=k+1}^n x'_i \right\| = o_P((\log \log n)^{-1}). \quad (3.3.7)$$

Dann folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(a(\log n) |T_2(n)| \leq t + d_1(\log n)) = \exp(-2 \exp(-t)) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

wobei a, d_1 wie in Theorem 2.7 definiert sind.

Beweis: Es gilt für $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} & \sigma T_2(n) \\ = & \max_{1 \leq k < n} \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^k (y_i - x'_i \hat{\beta}_n) - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - x'_i \hat{\beta}_n) \right) \\ = & \max_{1 \leq k < n} \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^k \varepsilon_i - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \right. \\ & \left. - \left(\frac{n-k}{n} \sum_{i=1}^k x'_i (X'_n X_n)^{-1} X'_n \xi_n - \frac{k}{n} \sum_{i=k+1}^n x'_i (X'_n X_n)^{-1} X'_n \xi_n \right) \right) \\ \stackrel{\text{Kor. 3.2, (3.2.32), (3.3.7)}}{=} & \max_{1 \leq k < n} \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^k \varepsilon_i - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \right) + o_P((\log \log n)^{-\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Aus (3.3.8) folgt mit Theorem 1.3. in [Hor97] bzw. Theorem 4.1.3. in [CsHo97] die Behauptung. \square

Bemerkung 3.24. T_2 kann in Theorem 3.6 durch T_2^* ersetzt werden, falls gilt:

$$|\hat{\sigma} - \sigma| = o_P((\log \log n)^{-1}) \quad (n \rightarrow \infty); \sigma, \hat{\sigma} \neq 0. \quad (3.3.9)$$

Beweis: Aus (3.3.9) erhalten wir:

$$|\hat{\sigma}^{-1} - \sigma^{-1}| = o_P((\log \log n)^{-1}) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.3.10)$$

$$T_2(n) \stackrel{(3.3.8), \text{Bem. 3.22, Iter. Log.}}{=} \mathcal{O}_P((\log \log n)^{\frac{1}{2}}) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.3.11)$$

$$|T_2(n) - T_2^*(n)| \stackrel{(3.3.10), (3.3.11)}{=} o_P((\log \log n)^{-\frac{1}{2}}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Damit folgt die Behauptung. \square

Unter der Alternative gilt folgender Zusammenhang:

Theorem 3.7. Gelte H_A , (3.2.5)-(3.2.9), (3.2.13)-(3.2.20), (3.3.1)-(3.3.6).

Weiter gelte mit $k^* = k^*(n)$:

$$\left\| \frac{1}{k^*} \sum_{i=1}^{k^*} x'_i - \frac{1}{n - k^*} \sum_{i=k^*+1}^n x'_i \right\| = o_P(1) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.3.12)$$

$$\left(\frac{k^*(n - k^*)}{n \log \log n} \right)^{\frac{1}{2}} |\dot{\delta}| \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.3.13)$$

Dann folgt:

$$\frac{|T_2(n)|}{(\log \log n)^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{P} \infty \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.3.14)$$

Beweis: Sei $\dot{\delta}_k \in \mathbb{R}^n$, der n -dimensionale Vektor, dessen ersten k Komponenten 0 sind und ab $(k + 1)$ $\dot{\delta}$ entsprechen. Dann gilt für $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} & \sigma |T_2(n)| \\ \geq & \left(\frac{n}{k^*(n - k^*)} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{i=1}^{k^*} (y_i - x'_i \hat{\beta}_n) - \frac{k^*}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - x'_i \hat{\beta}_n) \right| \\ = & \left(\frac{n}{k^*(n - k^*)} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{i=1}^{k^*} \varepsilon_i - \frac{k^*}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i - \frac{(n - k^*)k^*}{n} \dot{\delta} \right. \\ & - \left(\frac{n - k^*}{n} \sum_{i=1}^{k^*} x'_i (X'_n X_n)^{-1} X'_n \xi_n \right. \\ & \left. - \frac{k^*}{n} \sum_{i=k^*+1}^n x'_i (X'_n X_n)^{-1} X'_n \xi_n \right) \\ & \left. - \left(\frac{n - k^*}{n} \sum_{i=1}^{k^*} x'_i (X'_n X_n)^{-1} X'_n \dot{\delta}_{k^*} \right) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left| -\frac{k^*}{n} \sum_{k^*+1}^n x'_i (X'_n X_n)^{-1} X'_n \dot{\delta}_{k^*} \right| \\
 \stackrel{\text{Kor. 3.2, (3.2.20), (3.2.32), (3.3.12)}}{=} & \left(\frac{n}{k^*(n-k^*)} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{i=1}^{k^*} \varepsilon_i - \frac{k^*}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i - \frac{(n-k^*)k^*}{n} \dot{\delta} \right| \\
 & + o_P \left(\left(\frac{k^*(n-k^*)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \dot{\delta} \right) + o_P \left((\log \log n)^{\frac{1}{2}} \right) \\
 \stackrel{\text{Bem. 3.22, Iter. Log., (3.3.13)}}{=} & \left(\frac{k^*(n-k^*)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} |\dot{\delta}| + o_P \left(\left(\frac{(n-k^*)k^*}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \dot{\delta} \right). \quad (3.3.15)
 \end{aligned}$$

Aus (3.3.15) erhalten wir mit (3.3.13) (3.3.14). \square

Bemerkung 3.25.

$$\text{Gilt } |\hat{\sigma} - \sigma| = \mathcal{O}_P(1) \quad (n \rightarrow \infty); \hat{\sigma}, \sigma \neq 0, \quad (3.3.16)$$

so kann man T_2 in Theorem 3.7 durch T_2^* ersetzen.

Beweis: Aus (3.3.14) folgt für $n \rightarrow \infty$:

$$\frac{\max_{1 \leq k < n} \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{i=1}^k (y_i - x'_i \hat{\beta}_n) - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - x'_i \hat{\beta}_n) \right|}{(\log \log n)^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{P} \infty. \quad (3.3.17)$$

Aus (3.3.16) folgt:

$$\exists C > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\sigma - \hat{\sigma}| > C) = 0$$

und damit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{1}{\hat{\sigma}} < \frac{1}{C + \sigma} \right) = 0. \quad (3.3.18)$$

Aus (3.3.17) und (3.3.18) erhalten wir die Behauptung. \square

3.3.3 Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints

$$\begin{aligned}
 \text{Sei } \hat{k} &:= \inf \left\{ k \left| \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{i=1}^k (y_i - x'_i \hat{\beta}_n) - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - x'_i \hat{\beta}_n) \right| \right. \right. \\
 &= \max_{1 \leq k < n} \left. \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{i=1}^k (y_i - x'_i \hat{\beta}_n) - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - x'_i \hat{\beta}_n) \right| \right\}.
 \end{aligned}$$

Theorem 3.8. Gelte H_A , (3.2.5)-(3.2.9), (3.2.13)-(3.2.20), (3.3.1)-(3.3.6).

Weiter gelte:

$$k^* = [n\tau] \quad \text{für ein } 0 < \tau < 1, \quad (3.3.19)$$

$$\max_{1 \leq k < n} \left\| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x'_i - \frac{1}{n-k} \sum_{i=k}^n x'_i \right\| = o_P \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}} \dot{\delta}} \right) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.3.20)$$

$$\dot{\delta} = \dot{\delta}(n), |\dot{\delta}| \rightarrow 0, \frac{n^{\frac{1}{2}} \dot{\delta}}{(\log \log n)^{\frac{1}{2}}} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.3.21)$$

Dann folgt:

$$\left| \hat{k} - k^* \right| = \mathcal{O}_P \left(\frac{1}{\dot{\delta}^2} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.3.22)$$

Beweis: Sei für $1 \leq k < n$:

$$U_k = U_k(n) := \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^k (y_i - x'_i \hat{\beta}_n) - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - x'_i \hat{\beta}_n) \right).$$

Sei wie im Beweis zu Theorem 3.7 $\dot{\delta}_k \in \mathbb{R}^n$, der n -dimensionale Vektor, dessen ersten k Komponenten 0 sind und ab $k+1$ $\dot{\delta}$ entsprechen. Dann gilt für $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq k^*} |U_k| \\ &= \max_{1 \leq k < k^*} \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \left(\sum_{i=1}^k \varepsilon_i - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i - \frac{(n-k^*)k}{n} \dot{\delta} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \left(\frac{n-k}{n} \sum_{i=1}^k x'_i (X'_n X_n)^{-1} X'_n \xi_n \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{k}{n} \sum_{i=k+1}^n x'_i (X'_n X_n)^{-1} X'_n \xi_n \right) \right) \\ & \quad \left. - \left(\frac{n-k}{n} \sum_{i=1}^k x'_i (X'_n X_n)^{-1} X'_n \dot{\delta}_{k^*} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{k}{n} \sum_{i=k+1}^n x'_i (X'_n X_n)^{-1} X'_n \dot{\delta}_{k^*} \right) \right| \\ & \stackrel{\text{Kor. 3.2, (3.2.20), (3.2.32), (3.3.20), (3.3.21)}}{=} \max_{1 \leq k < k^*} \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{i=1}^k \varepsilon_i - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i - \frac{(n-k^*)k}{n} \dot{\delta} \right| \\ & \quad + o_P(1) \\ & \stackrel{\text{Bem. 3.22, Iter. Log.}}{=} \left(\frac{(n-k^*)k^*}{n} \right)^{\frac{1}{2}} |\dot{\delta}| + \mathcal{O}_P \left((\log \log n)^{\frac{1}{2}} \right) \\ & \stackrel{(3.3.19), (3.3.21)}{=} (\tau(1-\tau))^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} |\dot{\delta}| + o_P \left(n^{\frac{1}{2}} \dot{\delta} \right). \quad (3.3.23) \end{aligned}$$

Analog erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 & \max_{k^* \leq k < n} |U_k| \\
 \stackrel{\text{Kor. 3.2, (3.2.32), (3.2.20), (3.3.20), (3.3.21)}}{=} & \max_{k^* \leq k < n} \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{i=1}^k \varepsilon_i - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i - \frac{k^*(n-k)}{n} \dot{\delta} \right| \\
 & + o_P(1) \\
 \stackrel{\text{Bem. 3.22, Iter. Log., (3.3.21)}}{=} & \left(\frac{(n-k^*)k^*}{n} \right)^{\frac{1}{2}} |\dot{\delta}| + \mathcal{O}_P \left((\log \log n)^{\frac{1}{2}} \right) \\
 \stackrel{(3.3.19), (3.3.21)}{=} & (\tau(1-\tau))^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} |\dot{\delta}| + o_P \left(n^{\frac{1}{2}} \dot{\delta} \right) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.3.24)
 \end{aligned}$$

sowie für $\varepsilon > 0$:

$$\max_{1 \leq k \leq k^* - n\varepsilon} |U_k| < ((1-\tau)(\tau-\varepsilon))^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} |\dot{\delta}| + o_P \left(n^{\frac{1}{2}} \dot{\delta} \right) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.3.25)$$

$$\max_{k^* + n\varepsilon \leq k < n} |U_k| < (\tau(1-\tau-\varepsilon))^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} |\dot{\delta}| + o_P \left(n^{\frac{1}{2}} \dot{\delta} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.3.26)$$

Sei für $1 \leq k < n$, $0 < \alpha < k^* < \beta < 1$:

$$\begin{aligned}
 V_k &= V_k(n) := (U_k)^2 - (U_{k^*})^2, \\
 \tilde{k} &= \tilde{k}(n) := \inf \left\{ k \mid n\alpha \leq k \leq n\beta, V_k = \max_{n\alpha \leq i < n\beta} V_i \right\}.
 \end{aligned}$$

Dann folgt mit (3.3.23)-(3.3.26):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\hat{k} = \tilde{k} \right) = 1. \quad (3.3.27)$$

Ähnlich zum Nachweis von (3.3.23) und (3.3.24) folgt mit Korollar 3.2, (3.2.32), (3.2.20), (3.3.20), (3.3.21), Bemerkung 3.22:

Es gibt eine Folge $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d. normalverteilter zentrierter Zufallsvariablen mit $\text{Var } Z_1 = \sigma^2$, so dass gilt:

$$\begin{aligned}
 & \max_{n\alpha \leq k \leq n\beta} \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \left(\frac{k(n-k)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} U_k - \left((k-k^*)_+ \dot{\delta} - \frac{k}{n} (n-k^*) \dot{\delta} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \left(\sum_{i=1}^k Z_i - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n Z_i \right) \right| = o_P(1) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.3.28)
 \end{aligned}$$

Sei für $1 \leq k < n$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{U}_k &= \tilde{U}_k(n) := \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{i=1}^k Z_i - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n Z_i + (k-k^*)_+ \dot{\delta} - \frac{k}{n} (n-k^*) \dot{\delta} \right|, \\
 \tilde{V}_k &= \tilde{V}_k(n) := \left(\tilde{U}_k \right)^2 - \left(\tilde{U}_{k^*} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Mit (3.3.28) folgt:

$$\max_{n\alpha \leq k \leq n-n\beta} \left| U_k - \tilde{U}_k \right| = o_P(1). \quad (3.3.29)$$

Im Beweis von Theorem 2.8.1 in [CsHo97] wird gezeigt, dass gilt:

$$\limsup_{C \rightarrow \infty} \max_{n\alpha \leq k \leq k^* - \frac{C}{\delta^2}} \tilde{V}_k = -\infty + o_P(1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Wegen (3.3.29) folgt damit:

$$\limsup_{C \rightarrow \infty} \max_{n\alpha \leq k \leq k^* - \frac{C}{\delta^2}} V_k = -\infty + o_P(1) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.3.30)$$

Analog gilt:

$$\limsup_{C \rightarrow \infty} \max_{k^* + \frac{C}{\delta^2} \leq k \leq n\beta} V_k = -\infty + o_P(1) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.3.31)$$

Aus (3.3.30) und (3.3.31) folgt mit (3.3.27) (3.3.22). \square

3.3.4 Varianzschätzer

Sei \hat{k} ($p \leq \hat{k} \leq n - p$) ein Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints. Sei weiter (vgl. Abschnitt 3.2.6) für $p \leq \ell \leq n - p$, $0 \leq h \leq \ell \leq n - (h + 1)$:

$$\begin{aligned} \hat{F}_\ell(h) &:= \sum_{i=1}^{\ell-h} \left(y_i - x'_i \hat{\beta}_\ell \right) \left(y_{i+h} - x'_{i+h} \hat{\beta}_\ell \right), \\ \hat{F}_\ell^*(h) &:= \sum_{i=\ell+1}^{n-h} \left(y_i - x'_i \hat{\beta}_\ell^* \right) \left(y_{i+h} - x'_{i+h} \hat{\beta}_\ell^* \right). \end{aligned}$$

Dann definieren wir folgende Schätzer $\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_1(n, L, \hat{k})$, $\hat{\sigma}_2 = \hat{\sigma}_2(n, L, \hat{k})$ für σ :

Standardschätzer:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_1 &:= \left(\frac{1}{n-2p} (F_{\hat{k}}(0) + F_{\hat{k}}^*(0)) + 2 \sum_{h=1}^L \frac{L-h}{L} \frac{1}{n-2h-2p} (F_{\hat{k}}(h) + F_{\hat{k}}^*(h)) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &(L < \hat{k} < n - (L + 1), L < \frac{n}{2} - p, p \leq \hat{k} \leq n - p), \end{aligned}$$

Alternativschätzer

$$\hat{\sigma}_2 := \begin{cases} \left(\frac{1}{n-p} F_{\hat{k}}(0) + 2 \sum_{h=1}^L \frac{L-h}{L} \frac{1}{n-h-p} F_{\hat{k}}(h) \right)^{\frac{1}{2}}, & \hat{k} > n - \hat{k}, L + p < \hat{k} \leq n - p, \\ \left(\frac{1}{n-p} F_{\hat{k}}^*(0) + 2 \sum_{h=1}^L \frac{L-h}{L} \frac{1}{n-h-p} F_{\hat{k}}^*(h) \right)^{\frac{1}{2}}, & \hat{k} \leq n - \hat{k}, p \leq \hat{k} < n - L - p. \end{cases}$$

Bemerkung 3.26. $\hat{\sigma}_1$ ist nur definiert, falls gilt:

$$L < \hat{k} < n - (L + 1), \quad (3.3.32)$$

$$L < \frac{n}{2} - p. \quad (3.3.33)$$

(3.3.33) ist (asymptotisch) erfüllt, falls gilt: $L = L(n) = o(n)$, $(n \rightarrow \infty)$.

Gilt $L \rightarrow \infty$, $L = o(n)$ ($n \rightarrow \infty$) (vgl. Theorem 3.9, Korollar 3.5), so ist (3.3.32) (asymptotisch) stets erfüllt, falls man einen beliebigen Schätzer \tilde{k} durch $\hat{k} := \min \left(\max \left(\tilde{k}, L+1 \right), n - (L+2) \right)$ ersetzt. Bei den Simulationsstudien in Abschnitt 3.3.5 sowie bei den Anwendungsstudien in [Gie02a] wählen wir diese Vorgehensweise. Für den Fall der Alternative ist die Bedingung (3.3.32) (asymptotisch) erfüllt, falls gilt: $L = L(n) = o(n)$, $k^* = [n\tau]$, $0 < \tau < 1$, $\frac{k^* - \tilde{k}}{n} = o_P(1)$ (vgl. Theorem 3.3). Unter den genannten Voraussetzungen spielt es (asymptotisch) auch keine Rolle, ob der Schätzer \tilde{k} oder \hat{k} verwendet wird. Asymptotisch stimmen die beiden Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints überein.

Gilt $L = o(n)$, so ist $\hat{\sigma}_2$ für einen beliebigen Schätzer \hat{k} für den Zeitpunkt des Changepoints ($p \leq \hat{k} \leq n - p$) (asymptotisch) stets definiert.

Unter Verwendung der Propositionen 3.1 - 3.3 aus Abschnitt 3.2.6 können wir analog wie in Theorem 3.4 das Verhalten der Varianzschätzer unter der Nullhypothese beschreiben.

Theorem 3.9. Es gelte H_0 und es seien die Bedingungen (3.2.5)-(3.2.20) erfüllt. Weiter gelte $L = L(n) \rightarrow \infty$, $L = o(n)$ ($n \rightarrow \infty$), $p \leq \hat{k} \leq n - p$. Dann gilt für die oben definierten $\hat{\sigma}_i$ ($i=1,2$):

$$|\hat{\sigma}_i - \sigma| = o_P \left(n^{-\frac{\delta}{2(2+\delta)}} \right) + \mathcal{O}_P \left(L^{-\frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}} + \left(\frac{L \log \log n}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Bei Betrachtung von $\hat{\sigma}_1$ werden zusätzlich (3.3.32), (3.3.33) vorausgesetzt.

Beweis: Theorem 3.9 wird analog wie Theorem 3.4 unter Verwendung von Proposition 3.1 sowie Proposition 3.2 hergeleitet. \square

Korollar 3.5. Gelte H_0 , (3.2.5)-(3.2.9), (3.2.12)-(3.2.20), (3.2.179), (3.3.1)-(3.3.6), $p \leq \hat{k} \leq n - p$. Dann folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(a(\log n) |T_2^*(n)| \leq t + d_1(\log n)) = \exp(-2 \exp(-t)) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

wobei a, d_1 wie in Theorem 2.7 definiert sind und der in T_2^* verwendete Schätzer für σ einer der Schätzer $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ sei. Bei Betrachtung von $\hat{\sigma}_1$ werden zusätzlich (3.3.32), (3.3.33) vorausgesetzt.

Beweis: (3.3.34) folgt aus Theorem 3.6 mit Theorem 3.9 und Bemerkung 3.24. \square

Analog zu Theorem 3.5 erhalten wir unter Verwendung der Propositionen 3.1 - 3.3 das folgende Theorem, das das Verhalten der Schätzer $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ unter der Alternative beschreibt.

Theorem 3.10. Gelte H_A , (3.2.5)-(3.2.20), (3.2.182), $p \leq \hat{k} \leq n - p$. Dann folgt für $n \rightarrow \infty$ für $i = 1, 2$:

$$|\hat{\sigma}_i - \sigma| = o_P \left(n^{-\frac{\delta}{2(2+\delta)}} \right) + \mathcal{O}_P \left(\left(\frac{L}{n} \left(\log \log n + |\hat{k} - k^*| \right) \right)^{\frac{1}{2}} \dot{\sigma} + L^{-\frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}} \right).$$

Bei Betrachtung von $\hat{\sigma}_1$ werden zusätzlich (3.3.32), (3.3.33) vorausgesetzt.

Beweis: Theorem 3.10 folgt analog zum Beweis von Theorem 3.5 mit den Propositionen 3.1-3.3. \square

Aus Theorem 3.10 erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 3.6. *Gelte H_A , (3.2.5)-(3.2.20), (3.2.190), (3.3.1)-(3.3.6) sowie (3.3.19)-(3.3.21) erfüllt. \hat{k} sei der in Abschnitt 3.3.3 definierte Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints. Dann gilt für $i = 1, 2$:*

$$|\hat{\sigma}_i - \sigma| = o_P(1) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.3.34)$$

$$\frac{|T_2^*(n)|}{(\log \log n)^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{P} \infty \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.3.35)$$

wobei als Schätzer für σ in T_2^* einer der Schätzer $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ gewählt sei. Bei Betrachtung von $\hat{\sigma}_1$ werden zusätzlich (3.3.32), (3.3.33) vorausgesetzt.

Beweis: (3.3.34) folgt aus Theorem 3.10 mit Theorem 3.8. (3.3.35) folgt aus Theorem 3.7 mit (3.3.34) und Bemerkung 3.25. \square

3.3.5 Simulationen

Zur Konstruktion einer Matrizenfolge $\{X_k\}_{1 \leq k \leq n}$ gehen wir wie in Abschnitt 3.2.7 vor. Bei allen Simulationsläufen, deren Ergebnisse wir in diesem Abschnitt präsentieren, betrachten wir das in Abschnitt 3.3.1 vorgestellte Modell mit folgenden Parametern:

$$\begin{aligned} n &= 100, 1000, \\ L &= 10, 20, 30, \\ p &= 2, \\ \beta &= (1, 2)', \\ k^* &= 67, \text{ bzw. } k^* = 100, \text{ falls kein Changepoint vorliegt,} \\ \dot{\delta} &= 1.5 \sigma ((1 - \phi)(1 - \phi^2))^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Der Fehlerprozess $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ wird als Folge von i.i.d. standardnormalverteilten Zufallsvariablen bzw. als AR(1)-Prozess vorausgesetzt:

$$\varepsilon_i = \phi \varepsilon_{i-1} + \tilde{\varepsilon}_i \quad (i \in \mathbb{Z}), \quad \{\tilde{\varepsilon}_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \text{ i.i.d., } \tilde{\varepsilon}_1 \sim N(0, 1).$$

$\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ hat für $0 \leq \phi < 1$ die Standardabweichung $\sigma = ((1 - \phi)(1 - \phi^2))^{-\frac{1}{2}}$. Die Höhe des Changepoints $\dot{\delta}$ wird also so normiert, dass sie relativ zur Standardabweichung (die Teststatistik wird durch die Standardabweichung normiert) unabhängig vom Grad der Korrelation gleich bleibt.

3.3.5.1 Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints

Bei den Simulationen bezüglich des Schätzers für den Zeitpunkt des Changepoints gehen wir so vor, dass wir für $n=100$ 1000 Simulationsläufe mit den oben angegebenen Parametern realisieren. Den Zeitpunkt des Changepoints schätzen wir mit dem in Abschnitt 3.3.3 definierten Schätzer \hat{k} . Es läßt sich feststellen, dass der Schätzer für den

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

Zeitpunkt des Changepoints für den Fall der Nullhypothese erwartungsgemäß zufälligen Schwankungen unterliegt (vgl. Abbildungen 33, 37, 39). Es kann keine Tendenz zu einem bestimmten Wert festgestellt werden. Für den Fall der Alternative zeigt sich in allen betrachteten Fällen, dass der Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints sich stabil in der Nähe des tatsächlichen Changepoints befindet. Bei $\phi=0.9$ wird der Zeitpunkt des Changepoints sehr genau geschätzt. Der Grund hierfür ist der "hohe" Changepoint in diesem Fall. In den folgenden Abbildungen 33-40 sind die Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints über die 1000 Simulationsläufe dargestellt.

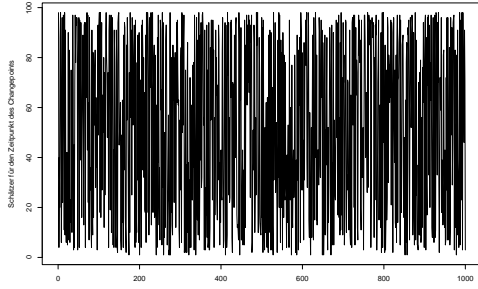


Abbildung 33: $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d., kein Changepoint.

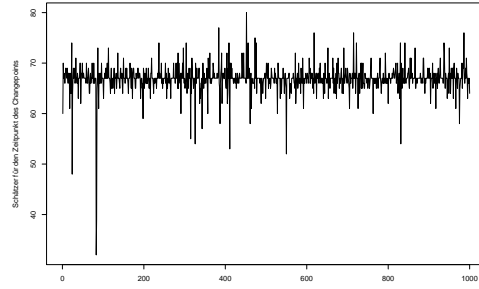


Abbildung 34: $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d., Changepoint.

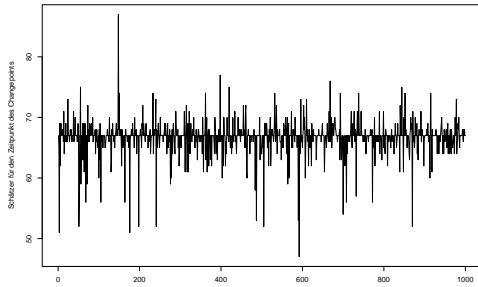


Abbildung 35: $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.1$, Changepoint.

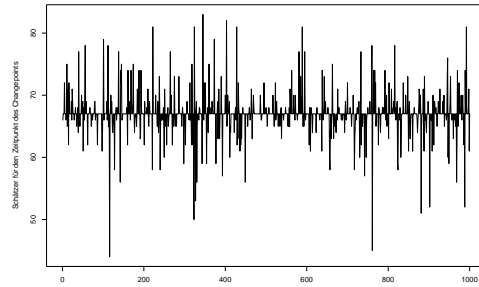


Abbildung 36: $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.5$, Changepoint.

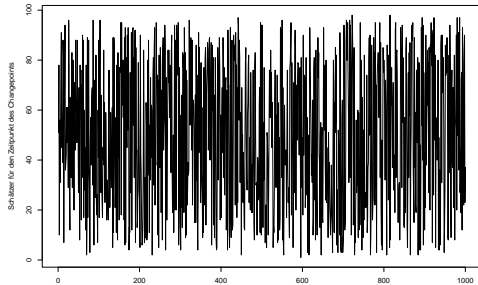


Abbildung 37: $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.7$, kein Changepoint.

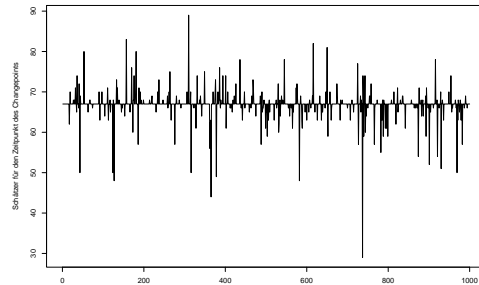


Abbildung 38: $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.7$, Changepoint.

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

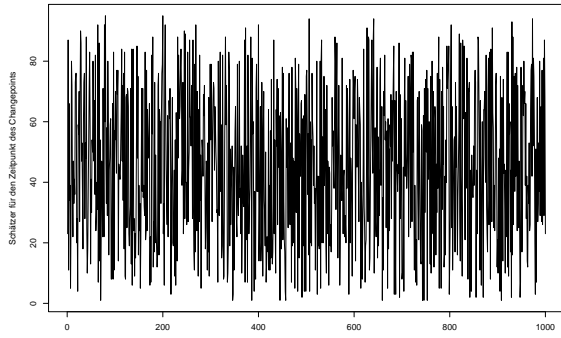


Abbildung 39: $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.9$, kein Changepoint.

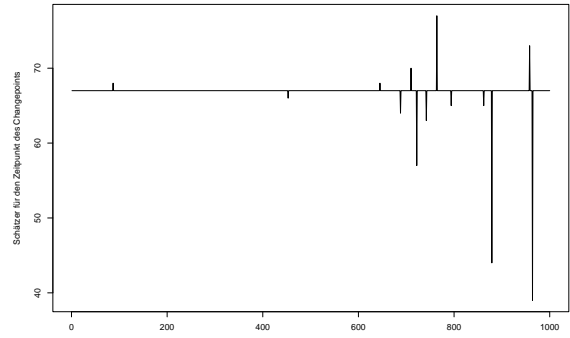


Abbildung 40: $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.9$, Changepoint.

3.3.5.2 Verhalten der Varianzschätzer

Bei den Simulationsstudien bezüglich der Schätzer der Varianz bzw. der Standardabweichung der $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ gehen wir so vor, dass wir 1000 Simulationen mit den oben angegebenen Parametern durchführen. Durch Vergleich der über die Simulationsläufe ermittelten arithmetischen Mittel für die Schätzer $\hat{\sigma}_1$ bzw. $\hat{\sigma}_2$ mit der tatsächlichen Standardabweichung von $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, d.h. mit $\sigma = ((1 - \phi)(1 - \phi^2))^{-\frac{1}{2}}$, beurteilen wir die Güte der Schätzer. Das arithmetische Mittel über die Schätzer der Standardabweichung $\hat{\sigma}_1$ bzw. $\hat{\sigma}_2$ bezeichnen wir für den Rest dieses Abschnitts mit $\bar{\sigma}_1$ bzw. $\bar{\sigma}_2$. Es zeigt sich, dass für $n=100$ die wahre Standardabweichung durch $\hat{\sigma}_1$, $\hat{\sigma}_2$ unterschätzt wird. Dies gilt insbesondere für hochkorrelierte Zufallsvariablen. Für $n=1000$ erhalten wir bessere Resultate. Für $n=1000$ wird σ teilweise überschätzt. $\hat{\sigma}_2$ liefert etwas höhere Schätzer für die Standardabweichung als $\hat{\sigma}_1$.

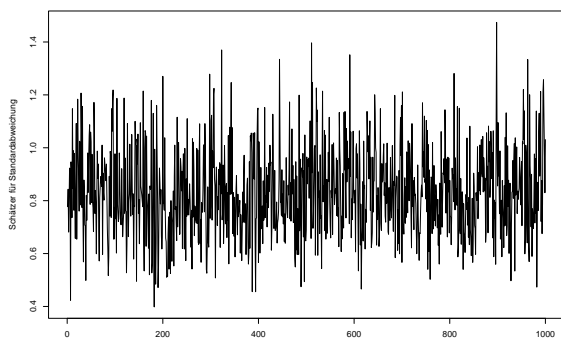


Abbildung 41: $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d., kein Changepoint, $L=10$, $n=100$, $\bar{\sigma}_1 = 0.833$, $\sigma = 1$.

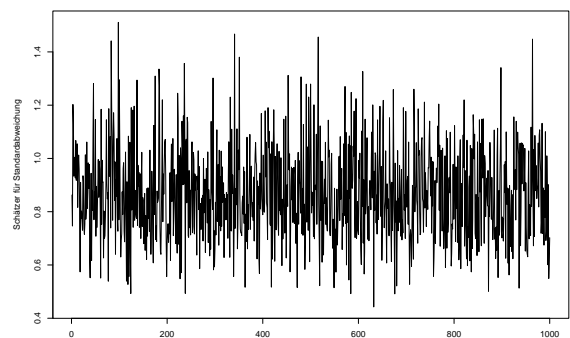


Abbildung 42: $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d., Changepoint, $L=10$, $n=100$, $\bar{\sigma}_1 = 0.867$, $\sigma = 1$.

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

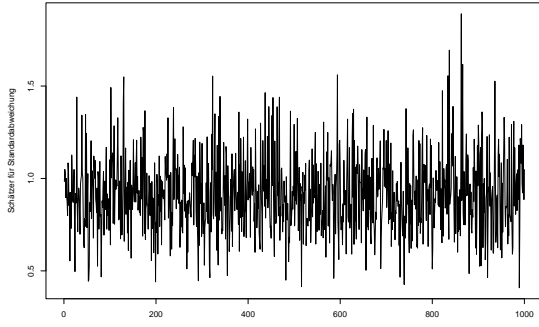


Abbildung 43: $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.1$, kein Changepoint, $L=10$, $n=100$, $\bar{\sigma}_2 = 0.915$, $\sigma = 1.059$.

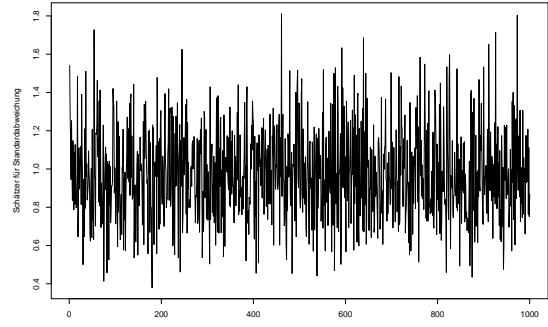


Abbildung 44: $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.1$, Changepoint, $L=10$, $n=100$, $\bar{\sigma}_2 = 0.974$, $\sigma = 1.059$.

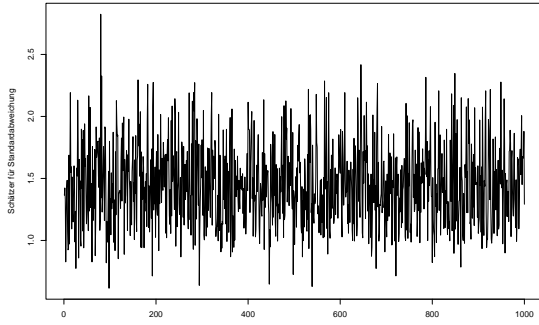


Abbildung 45: $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.5$, kein Changepoint, $L=10$, $n=100$, $\bar{\sigma}_1 = 1.445$, $\sigma = 1.633$.

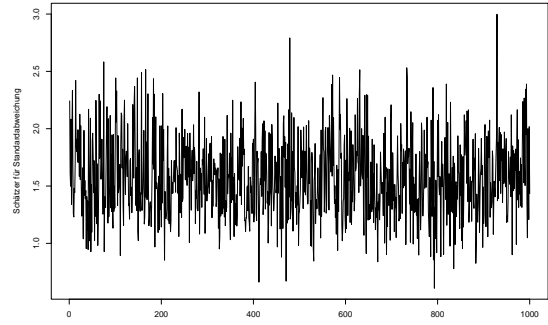


Abbildung 46: $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.5$, Changepoint, $L=10$, $n=100$, $\bar{\sigma}_1 = 1.573$, $\sigma = 1.633$.

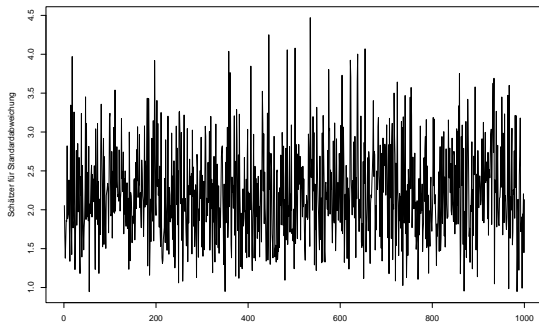


Abbildung 47: $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.7$, kein Changepoint, $L=10$, $n=100$, $\bar{\sigma}_2 = 2.216$, $\sigma = 2.557$.

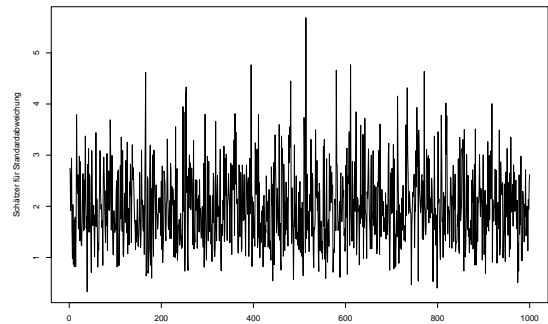


Abbildung 48: $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.7$, kein Changepoint, $L=20$, $n=100$, $\bar{\sigma}_2 = 2.569$, $\sigma = 2.557$.

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

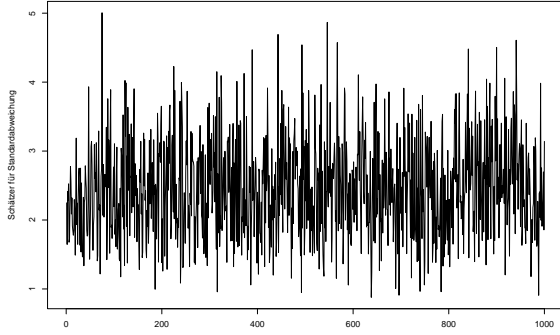


Abbildung 49: $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.7$,
Changepoint, $L=10$, $n=100$,
 $\bar{\sigma}_2 = 2.456$, $\sigma = 2.557$.

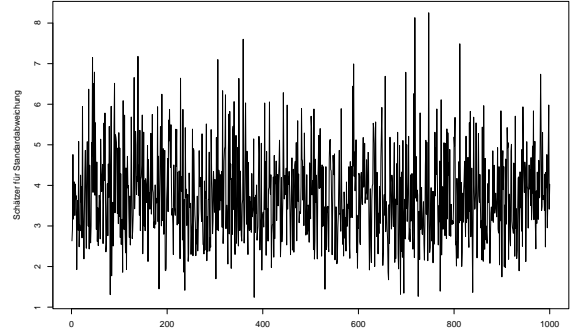


Abbildung 50: $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.9$, kein
Changepoint, $L=10$, $n=100$,
 $\bar{\sigma}_1 = 3.748$, $\sigma = 7.255$.

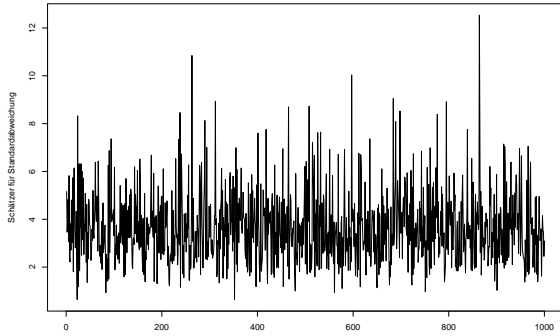


Abbildung 51: $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.9$, kein
Changepoint, $L=20$, $n=100$,
 $\bar{\sigma}_1 = 3.645$, $\sigma = 7.255$.

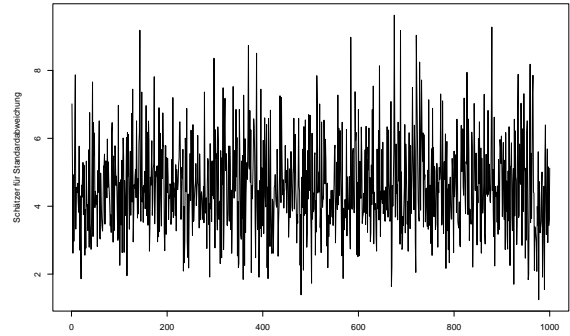


Abbildung 52: $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.9$,
Changepoint, $L=10$, $n=100$,
 $\bar{\sigma}_1 = 4.584$, $\sigma = 7.255$.

	$\phi=0$	$\phi=0.1$	$\phi=0.5$	$\phi=0.7$	$\phi=0.9$
$L=10$, kein Cp., $n=100$	0.833	0.901	1.445	2.155	3.748
$L=20$, kein Cp., $n=100$	0.7	0.772	1.257	1.91	3.645
$L=20$, kein Cp., $n=1000$	0.959	1.063	1.838	2.909	7.064
$L=30$, kein Cp., $n=1000$	0.945	1.039	1.829	2.948	7.521
$L=10$, Cp., $n=100$	0.867	0.951	1.573	2.371	4.584
$L=20$, Cp., $n=1000$	0.976	1.079	1.883	3.015	7.429
σ	1	1.059	1.633	2.557	7.255

Arithmetisches Mittel über $\hat{\sigma}_1$ im Vergleich zur tatsächlichen Standardabweichung σ .

	$\phi=0$	$\phi=0.1$	$\phi=0.5$	$\phi=0.7$	$\phi=0.9$
$L=10$, kein Cp., $n=100$	0.84	0.915	1.476	2.216	3.878
$L=20$, kein Cp., $n=100$	0.727	0.806	1.318	2.569	3.918
$L=20$, kein Cp., $n=1000$	0.965	1.067	1.854	2.937	7.133
$L=30$, kein Cp., $n=1000$	0.951	1.047	1.84	2.969	7.625
$L=10$, Cp., $n=100$	0.882	0.974	1.621	2.456	4.869
$L=20$, Cp., $n=1000$	0.979	1.084	1.892	3.032	7.508
σ	1	1.059	1.633	2.557	7.255

Arithmetisches Mittel über $\hat{\sigma}_2$ im Vergleich zur tatsächlichen Standardabweichung σ .

3.3.5.3 Verhalten der Teststatistik

Zum Vergleich des Verhaltens der Teststatistik T_2^* mit den in den Korollaren 3.5 bzw. 3.6 formulierten asymptotischen Aussagen werden jeweils 1000 Simulationsläufe mit $n=100$ bzw. $n=1000$ Beobachtungen durchgeführt. Dazu werden über die 1000 Simulationen die relativen Häufigkeiten bestimmt, mit denen gilt:

$$a(\log n)T_2^*(n)^{\frac{1}{2}} \leq t + d_1(\log n),$$

wobei $t \in [-1, 6]$. Diese relativen Häufigkeiten werden verglichen mit der Gumbel-Verteilungsfunktion:

$$G(t) = \exp(-2 \exp(-t)).$$

Dabei wird zur Berechnung von T_2^* einer der beiden Varianzschätzer $\hat{\sigma}_1$, $\hat{\sigma}_2$ verwendet. Für $n=100$ zeigt sich, dass für den Fall, dass kein Changepoint vorliegt, für Beobachtungen mit niedrigen und mittleren Korrelationen ($0 \leq \phi \leq 0.7$) die Gumbel-Verteilung eine gute Approximation an die simulierten relativen Häufigkeiten im Sinne von Theorem 3.6 liefert. Für hohe Korrelationen ($\phi=0.9$) treten allerdings deutliche Abweichungen auf. Die simulierten relativen Häufigkeiten für die Teststatistik T_2 liegen deutlich oberhalb der Gumbel-Verteilungsfunktion. Die für praktische Anwendungen relevante Teststatistik T_2^* nimmt dagegen höhere Werte an als die asymptotische Aussage aus Theorem 3.6 erwarten läßt. Der Grund hierfür liegt darin, dass die Schätzer $\hat{\sigma}_1$, $\hat{\sigma}_2$ die tatsächliche Standardabweichung für $n=100$, $\phi = 0.9$ deutlich unterschätzen.

Für $n=1000$ liefern die Simulationsstudien deutlich bessere Approximationen der Teststatistik T_2 bzw. T_2^* an die Gumbel-Verteilung.

Für den Fall der hier betrachteten Alternative liefern alle durchgeführten Simulationen "gute" Ergebnisse, d.h. die Teststatistik nimmt im Vergleich zur Nullhypothese hohe Werte an.

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

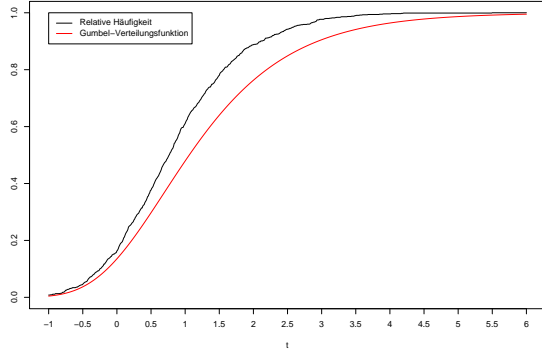


Abbildung 53: T_2 , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d., kein Changepoint, $n=100$.

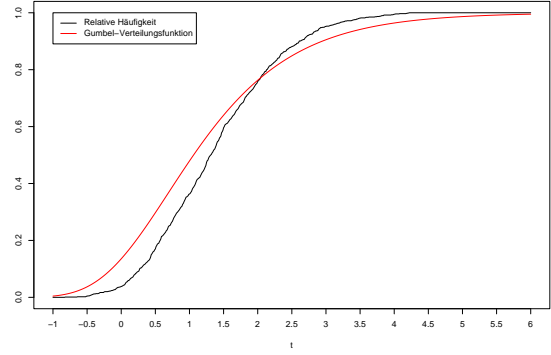


Abbildung 54: T_2 , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d., kein Changepoint, $n=1000$.

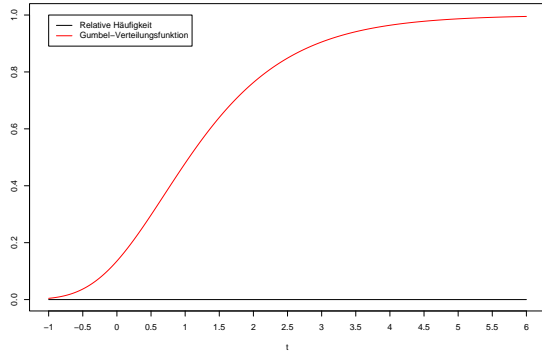


Abbildung 55: T_2 , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d., Changepoint, $n=1000$.

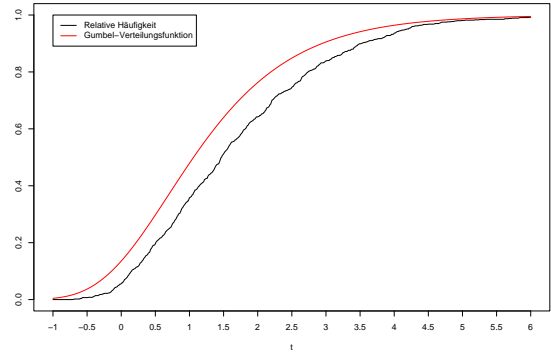


Abbildung 56: T_2^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d., kein Changepoint, $\hat{\sigma}_1$, $L=10$, $n=100$.

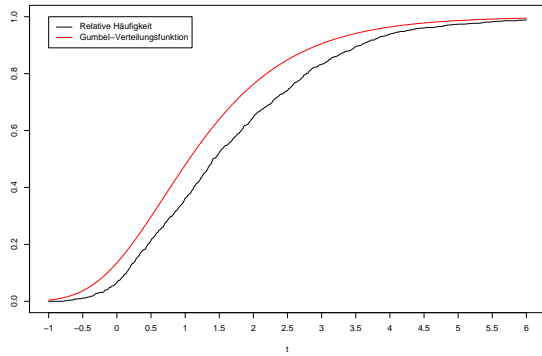


Abbildung 57: T_2^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d., kein Changepoint, $\hat{\sigma}_2$, $L=10$, $n=100$.

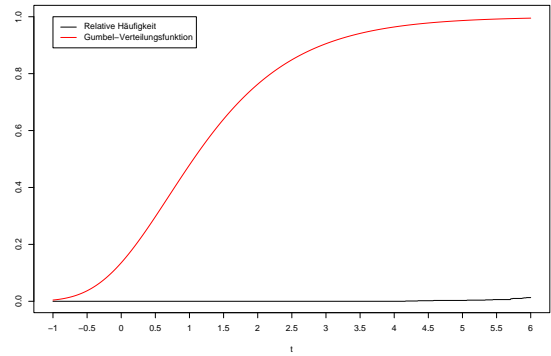


Abbildung 58: T_2^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d., Changepoint, $\hat{\sigma}_1$, $L=10$, $n=100$.

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

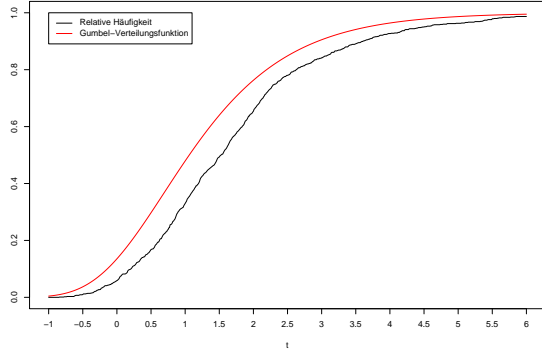


Abbildung 59: T_2^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.1$, kein Changepoint, $\hat{\sigma}_2$, $L=10$, $n=100$.

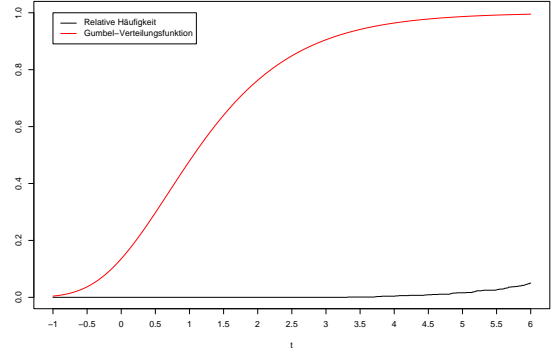


Abbildung 60: T_2^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.1$, Changepoint, $\hat{\sigma}_2$, $L=10$, $n=100$.

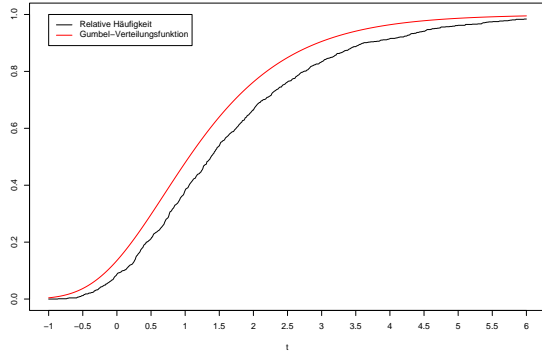


Abbildung 61: T_2^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.5$, kein Changepoint, $\hat{\sigma}_1$, $L=10$, $n=100$.

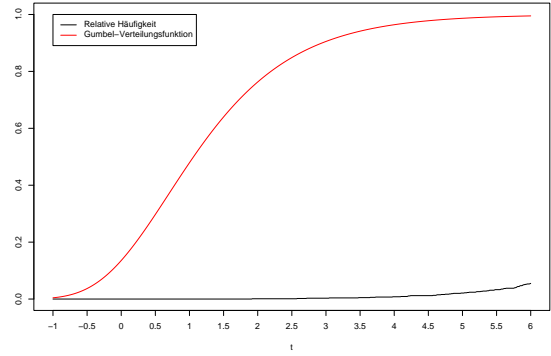


Abbildung 62: T_2^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.5$, Changepoint, $\hat{\sigma}_1$, $L=10$, $n=100$.

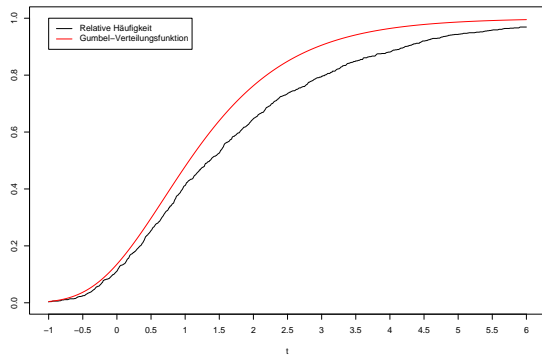


Abbildung 63: T_2^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.7$, kein Changepoint, $\hat{\sigma}_2$, $L=10$, $n=100$.

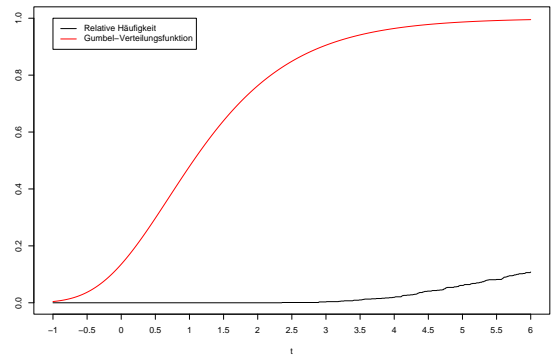


Abbildung 64: T_2^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.7$, Changepoint, $\hat{\sigma}_1$, $L=10$, $n=100$.

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

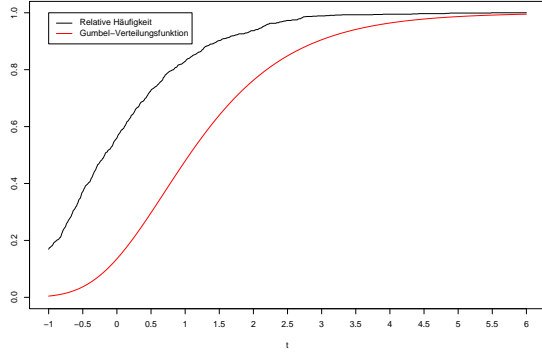


Abbildung 65: T_2 , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.9$, kein Changepoint, $n=100$.

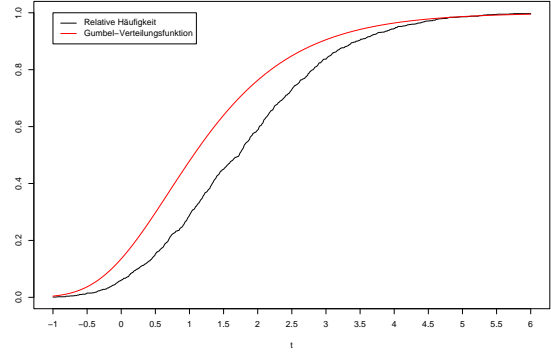


Abbildung 66: T_2 , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.9$, kein Changepoint, $n=1000$.

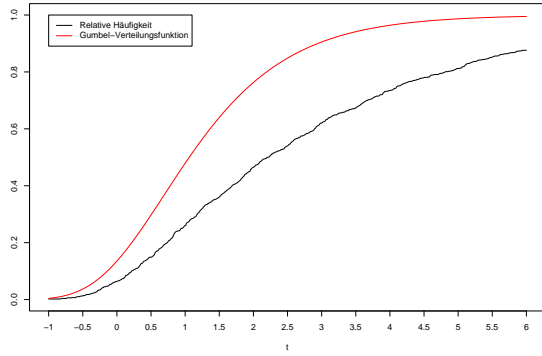


Abbildung 67: T_2^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.9$, kein Changepoint, $\hat{\sigma}_1$, $L=10$, $n=100$.

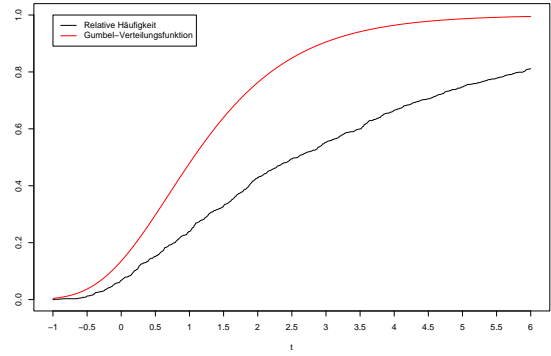


Abbildung 68: T_2^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.9$, kein Changepoint, $\hat{\sigma}_1$, $L=20$, $n=100$.

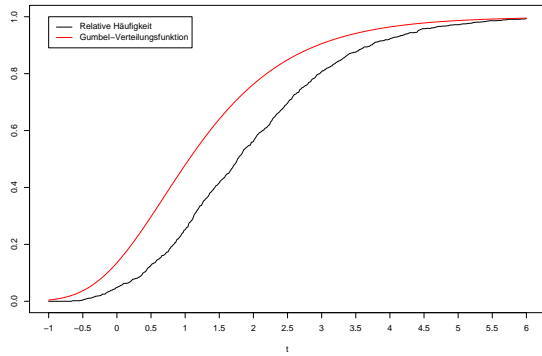


Abbildung 69: T_2^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.9$, kein Changepoint, $\hat{\sigma}_1$, $L=20$, $n=1000$.

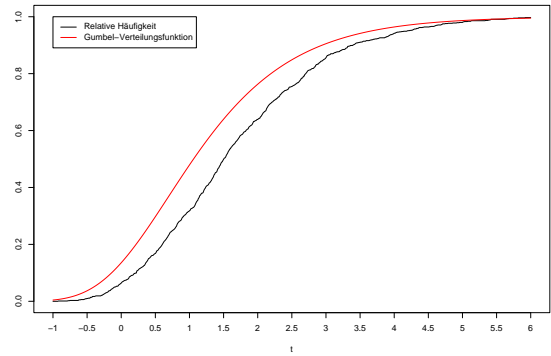


Abbildung 70: T_2^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.9$, kein Changepoint, $\hat{\sigma}_1$, $L=30$, $n=1000$.

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

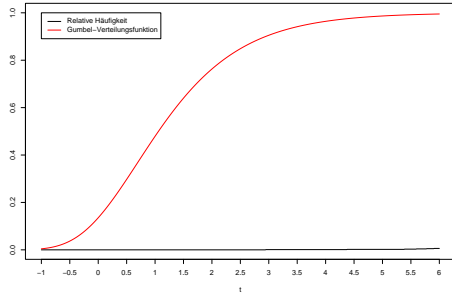


Abbildung 71: T_2^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.9$,
Changepoint, $\hat{\sigma}_1$, $L=10$,
 $n=100$.

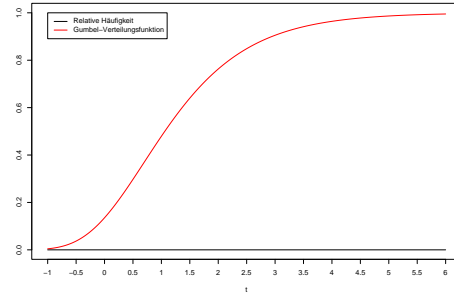


Abbildung 72: T_2^* , $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ AR(1), $\phi = 0.9$,
Changepoint, $\hat{\sigma}_1$, $L=20$,
 $n=1000$.

In der folgenden Tabelle vergleichen wir die 0.9-, 0.95-, 0.99-Quantile der Gumbel-Verteilung mit den ermittelten relativen Häufigkeiten, für die unter H_0 gilt:

$$a(\log n)T_2(n)^{\frac{1}{2}} \leq t + d_p(\log n) \quad \text{bzw.} \quad a(\log n)T_2^*(n)^{\frac{1}{2}} \leq t + d_p(\log n),$$

wobei t so gewählt ist, dass gilt: $\exp(-2 \exp(-t)) = 0.9 \text{ (0.95, 0.99)}$.

t	2.943515	3.663341	5.2933
$\exp(-2 \exp(-t))$	0.9	0.95	0.99
$\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d., T_2 , $n=100$	0.975	0.993	0.999
$\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d., T_2^* , $L=10$, $\hat{\sigma}_1$, $n=100$	0.832	0.91	0.984
$\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d., T_2^* , $L=10$, $\hat{\sigma}_2$, $n=100$	0.824	0.91	0.977
$\phi = 0.1$, T_2 , $n=100$	0.956	0.985	1
$\phi = 0.5$, T_2 , $n=100$	0.94	0.974	0.998
$\phi = 0.7$, T_2 , $n=100$	0.935	0.973	0.998
$\phi = 0.9$, T_2 , $n=100$	0.989	0.993	0.999
$\phi = 0.1$, T_2^* , $L=10$, $\hat{\sigma}_1$, $n=100$	0.846	0.916	0.977
$\phi = 0.1$, T_2^* , $L=10$, $\hat{\sigma}_2$, $n=100$	0.838	0.905	0.969
$\phi = 0.5$, T_2^* , $L=10$, $\hat{\sigma}_1$, $n=100$	0.826	0.901	0.967
$\phi = 0.5$, T_2^* , $L=10$, $\hat{\sigma}_2$, $n=100$	0.828	0.893	0.964
$\phi = 0.7$, T_2^* , $L=10$, $\hat{\sigma}_1$, $n=100$	0.778	0.856	0.953
$\phi = 0.7$, T_2^* , $L=10$, $\hat{\sigma}_2$, $n=100$	0.79	0.861	0.951
$\phi = 0.9$, T_2^* , $L=10$, $\hat{\sigma}_1$, $n=100$	0.612	0.7	0.841
$\phi = 0.9$, T_2^* , $L=10$, $\hat{\sigma}_2$, $n=100$	0.628	0.717	0.83
$\phi = 0.5$, T_2^* , $L=20$, $\hat{\sigma}_1$, $n=100$	0.652	0.742	0.869
$\phi = 0.5$, T_2^* , $L=20$, $\hat{\sigma}_2$, $n=100$	0.683	0.76	0.878
$\phi = 0.7$, T_2^* , $L=20$, $\hat{\sigma}_1$, $n=100$	0.647	0.739	0.868
$\phi = 0.7$, T_2^* , $L=20$, $\hat{\sigma}_2$, $n=100$	0.664	0.751	0.866
$\phi = 0.9$, T_2^* , $L=20$, $\hat{\sigma}_1$, $n=100$	0.546	0.629	0.765
$\phi = 0.9$, T_2^* , $L=20$, $\hat{\sigma}_2$, $n=100$	0.577	0.66	0.792

$\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d., T_2 , $n=1000$	0.961	0.987	1
$\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d., T_2^* , $L=20$, $\hat{\sigma}_1$, $n=1000$	0.928	0.973	1
$\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d., T_2^* , $L=20$, $\hat{\sigma}_2$, $n=1000$	0.931	0.969	1
$\phi = 0.1$, T_2 , $n=1000$	0.943	0.983	0.997
$\phi = 0.5$, T_2 , $n=1000$	0.846	0.926	0.996
$\phi = 0.7$, T_2 , $n=1000$	0.838	0.922	0.985
$\phi = 0.9$, T_2 , $n=1000$	0.863	0.931	0.988
$\phi = 0.1$, T_2^* , $L=20$, $\hat{\sigma}_1$, $n=1000$	0.939	0.971	0.998
$\phi = 0.1$, T_2^* , $L=20$, $\hat{\sigma}_2$, $n=1000$	0.935	0.974	0.998
$\phi = 0.5$, T_2^* , $L=20$, $\hat{\sigma}_1$, $n=1000$	0.925	0.974	0.999
$\phi = 0.5$, T_2^* , $L=20$, $\hat{\sigma}_2$, $n=1000$	0.924	0.973	0.997
$\phi = 0.7$, T_2^* , $L=20$, $\hat{\sigma}_1$, $n=1000$	0.93	0.964	0.994
$\phi = 0.7$, T_2^* , $L=20$, $\hat{\sigma}_2$, $n=1000$	0.928	0.966	0.995
$\phi = 0.9$, T_2^* , $L=20$, $\hat{\sigma}_1$, $n=1000$	0.827	0.91	0.98
$\phi = 0.9$, T_2^* , $L=20$, $\hat{\sigma}_2$, $n=1000$	0.823	0.908	0.982
$\phi = 0.5$, T_2^* , $L=30$, $\hat{\sigma}_1$, $n=1000$	0.934	0.971	0.999
$\phi = 0.5$, T_2^* , $L=30$, $\hat{\sigma}_2$, $n=1000$	0.936	0.97	0.998
$\phi = 0.7$, T_2^* , $L=30$, $\hat{\sigma}_1$, $n=1000$	0.931	0.967	0.996
$\phi = 0.7$, T_2^* , $L=30$, $\hat{\sigma}_2$, $n=1000$	0.925	0.965	0.996
$\phi = 0.9$, T_2^* , $L=30$, $\hat{\sigma}_1$, $n=1000$	0.875	0.925	0.986
$\phi = 0.9$, T_2^* , $L=30$, $\hat{\sigma}_2$, $n=1000$	0.879	0.925	0.981

3.3.5.4 Schlussfolgerungen aus den Simulationsstudien

In den Simulationsstudien können wir für eine relativ niedrige Anzahl von Beobachtungen ($n=100$) die theoretisch asymptotisch erzielten Resultate für den Schätzer des Zeitpunkts des Changepoints bestätigen. Sowohl bezüglich der Schätzer $\hat{\sigma}_1$, $\hat{\sigma}_2$ als auch des Verhaltens der Teststatistik T_2 bzw. T_2^* erzielen wir für $n=100$ "gute" Resultate für Beobachtungen mit niedrigen und mittleren Korrelationen ($0 \leq \phi \leq 0.7$). Für den Fall der Nullhypothese treten bei hohen Korrelationen ($\phi = 0.9$) deutliche Unterschiede zwischen den theoretisch asymptotisch erzielten Resultaten für die Schätzer $\hat{\sigma}_1$, $\hat{\sigma}_2$ bzw. die Teststatistiken T_2 , T_2^* und den Simulationsergebnissen auf. Bessere Resultate erzielen wir, wenn mehr Beobachtungen (z.B. $n=1000$) betrachtet werden.

Wir empfehlen, bei Anwendung der Teststatistik T_2 bzw. T_2^* auf Beobachtungen ($n \approx 100$) mit hohen Korrelationen die Fehlerwahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art (Nullhypothese wird verworfen, obwohl kein Changepoint vorliegt) "klein" zu wählen, z.B. $\alpha = 0.01$. Die Wahl des Parameters L , der bestimmt, bis zu welchem "lag" die Autokovarianzfunktion zur Schätzung der Standardabweichung σ berücksichtigt wird, sollte in Abhängigkeit davon gewählt werden, wie hoch die Korrelationen der Beobachtungen sind. Bei 100 Beobachtungen empfehlen wir bei einer AR(1)-Zeitreihe für niedrige bis mittlere Korrelationen ($0 < \phi \leq 0.7$) eine Wahl von L zwischen 3 und 10. Für höhere Korrelationen empfehlen wir eine Wahl von L zwischen 10 und 20.

Zu weiteren Einzelheiten bezüglich der praktischen Anwendung der Teststatistik T_2^* vgl. [Gie02a].

3.4 A posteriori Changepoint-Analyse in State-Space Modellen für abrupte Changepoints

State-Space Modelle sind sehr allgemein verwendbare Modelle, die insbesondere für zukünftige Anwendungen eine wichtige Rolle spielen können. State-Space Modelle umfassen sehr viele Modellklassen, wie z.B. lineare Modelle. Darüber hinaus können spezielle State-Space Modelle in eine äquivalente ARMA-Zeitreihe überführt werden. Umgekehrt kann jede ARMA-Zeitreihe in ein äquivalentes State-Space Modell transformiert werden (vgl. die Abschnitte 3.4.2 und 3.4.3 sowie [Aok87]). Wir betrachten hier State-Space Modelle, die etwas allgemeiner formuliert sind als die in der Literatur gewöhnlich verwendeten Modelle, so dass auch autoregressive Zeitreihen mit zufälligen Koeffizienten in dieser Modellklasse enthalten sind. Im Bereich der Telekommunikation gibt es Anwendungen von State-Space Modellen zur Erstellung von Verkehrswertprognosen (vgl. z.B. [AbSa85], [ChGa85], [Tom85]).

Zur Changepoint-Analyse in State-Space Modellen gibt es bereits Untersuchungen (vgl. z.B. [BaNi93], hier befinden sich auch zahlreiche weitere Literaturhinweise). Die uns bekannten bisher angewendeten Verfahren zur Changepoint-Analyse in State-Space Modellen basieren auf einer Anwendung rekursiver Schätzer. Über Kalman-Rekursionen werden Residuen bestimmt, die auf signifikante Veränderungen getestet werden können. In [BaNi93] werden Likelihood-Quotiententests konzipiert, die sowohl für die sequentielle als auch für die a posteriori Changepoint-Analyse verwendet werden. Ein Nachteil dieser Vorgehensweise liegt darin, dass die Verteilung der Residuen bekannt sein muss. Unseres Wissens gibt es bislang keine Untersuchungen zur a posteriori Changepoint-Analyse in State-Space Modellen, die aufbauend auf Invarianzprinzipien (vgl. Kapitel 2) asymptotische Verteilungsfunktionen von Teststatistiken herleiten.

Wir stellen hier neue Teststatistiken vor und untersuchen unter Verwendung von Invarianzprinzipien das asymptotische Verhalten der Verteilungsfunktionen der Teststatistiken für den Fall der Nullhypothese und dreier Alternativen. Ebenso konzipieren wir Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints und die Varianzen der Fehlerprozesse.

3.4.1 Modell

Wir betrachten folgendes Modell:

$$Y_i = H_i \beta_i + \varepsilon_i, i \in \mathbb{Z} \quad (\text{"Observation Equation"}), \quad (3.4.1)$$

$$\beta_i = G_i \beta_{i-1} + \omega_i, i \in \mathbb{Z} \quad (\text{"State Equation"}), \quad (3.4.2)$$

$$Y_i \in \mathbb{R}^\ell, \quad H_i := \left(h_{k_1, k_2}^{(i)} \right) \in \mathbb{R}^{\ell \times p}, \quad \beta_i \in \mathbb{R}^p \quad \forall i \in \mathbb{Z},$$

$$H_i = \left(h_{k_1, k_2}^{(i)} \right)_{1 \leq k_1 \leq \ell, 1 \leq k_2 \leq p} \in \mathbb{R}^{\ell \times p}, G_i = \left(g_{k_1, k_2}^{(i)} \right)_{1 \leq k_1, k_2 \leq p} \in \mathbb{R}^{p \times p} \text{ Zufallsmatrizen,}$$

so dass gilt:

es gibt Folgen (deterministischer) Matrizen $\left\{ \tilde{H}_i \right\}_{i \in \mathbb{Z}}, \left\{ \tilde{G}_i \right\}_{i \in \mathbb{Z}} :$

$$\tilde{H}_i := \left(\tilde{h}_{k_1, k_2}^{(i)} \right)_{1 \leq k_1 \leq \ell, 1 \leq k_2 \leq p} \in \mathbb{R}^{\ell \times p},$$

$$\tilde{G}_i := \left(\tilde{g}_{k_1, k_2}^{(i)} \right)_{1 \leq k_1, k_2 \leq p} \in \mathbb{R}^{p \times p},$$

und es gibt zentrierte Fehlerprozesse

$$\left\{ \eta_{k_1, k_2}^{(i)} \right\}_{i \in \mathbb{Z}, 1 \leq k_1 \leq \ell, 1 \leq k_2 \leq p},$$

$$\left\{ v_{k_1, k_2}^{(i)} \right\}_{i \in \mathbb{Z}, 1 \leq k_1, k_2 \leq p}, \text{ so dass gilt:}$$

$$h_{k_1, k_2}^{(i)} = \tilde{h}_{k_1, k_2}^{(i)} + \eta_{k_1, k_2}^{(i)} \quad \forall 1 \leq k_1 \leq \ell, 1 \leq k_2 \leq p,$$

$$g_{k_1, k_2}^{(i)} = \tilde{g}_{k_1, k_2}^{(i)} + v_{k_1, k_2}^{(i)} \quad \forall 1 \leq k_1, k_2 \leq p.$$

$$\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \text{ } \ell\text{-dim. Fehlerprozess mit } \text{Cov}(\varepsilon_i) = \sigma^2 R^{(\varepsilon)}, R^{(\varepsilon)} \text{ pos. def.}, \quad (3.4.3)$$

$$\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \text{ } p\text{-dim. Fehlerprozess mit } \text{Cov}(\omega_i) = \tau^2 R^{(\omega)}, R^{(\omega)} \text{ pos. def.} \quad (3.4.4)$$

$$\left\{ \left(\eta_{k_1, k_2}^{(i)} \right)_{1 \leq k_1 \leq \ell, 1 \leq k_2 \leq p} \right\}_{i \in \mathbb{Z}}, \left\{ \left(v_{k_1, k_2}^{(i)} \right)_{1 \leq k_1, k_2 \leq p} \right\}_{i \in \mathbb{Z}}, \{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}, \{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \quad (3.4.5)$$

sind Folgen unabhängiger Zufallsmatrizen bzw. Zufallsvektoren.

Die einzelnen Folgen sind ebenfalls voneinander unabhängig.

$$\max_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \|\varepsilon_i\|^{2+\delta} \leq \text{const}_{17}, \max_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \|\omega_i\|^{2+\delta} \leq \text{const}_{18} \quad \text{für ein } 0 < \delta \leq 1. \quad (3.4.6)$$

Zur Herleitung asymptotischer Aussagen für die noch zu definierenden Teststatistiken, Schätzern für den Zeitpunkt des Changepoints sowie Varianzschätzern der Fehlerprozesse $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ bzw. $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ benötigen wir Regularitätsbedingungen bezüglich $\{H_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ bzw. $\{G_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$.

Wir setzen stets voraus:

$$H'_i H_i \text{ } P\text{-f.s. invertierbar } \forall i \in \mathbb{N}_0, \quad (3.4.7)$$

$$\text{so dass } Q_i := H_i G_i (H'_{i-1} H_{i-1})^{-1} H'_{i-1} \quad \forall i \in \mathbb{N} \text{ } P\text{-f.s. definiert ist.}$$

Weiter benötigen wir:

$$\exists \text{ const}_{19} > 0: \max_{i \in \mathbb{N}_0} \|H_i\| \stackrel{P\text{-f.s.}}{\leq} \text{const}_{19}, \quad (3.4.8)$$

$$\exists \text{ const}_{20} > 0: \max_{i \in \mathbb{N}} \|Q_i\| \stackrel{P\text{-f.s.}}{\leq} \text{const}_{20}, \quad (3.4.9)$$

$$\exists \text{ const}_{21} > 0: \min_{i \in \mathbb{N}} |\text{Sp}(Q'_i Q_i)| \stackrel{P\text{-f.s.}}{\geq} \text{const}_{21}, \quad (3.4.10)$$

$$\exists \text{ const}_{22} > 0: \min_{i \in \mathbb{N}_0} |\text{Sp}(H'_i H_i)| \stackrel{P\text{-f.s.}}{\geq} \text{const}_{22}. \quad (3.4.11)$$

Es gibt eine positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$, so dass gilt:

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (I_\ell - Q_i)(I_\ell - Q_i)' - A \right\| \stackrel{P\text{-f.s.}}{=} o((\log n)^{-\vartheta}) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.4.12)$$

$$\text{für ein } \vartheta > 2 + \frac{27}{\delta}.$$

Es gibt eine positiv definite Matrix $B \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$, so dass gilt:

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H_i H_i' - B \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o((\log n)^{-\vartheta}) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.4.13)$$

für ein $\vartheta > 2 + \frac{27}{\delta}$.

Bemerkung 3.27. Wegen $R^{(\varepsilon)}$, $R^{(\omega)}$ positiv definit, existieren positiv definite Matrizen $C^{(\varepsilon)}$, $C^{(\omega)}$, so dass $R^{(\varepsilon)} = C^{(\varepsilon)} C^{(\varepsilon)'}$ und $R^{(\omega)} = C^{(\omega)'} C^{(\omega)}$. Durch Transformation des obigen Modells zu

$$\begin{aligned} Y_i^* &:= C^{(\varepsilon)^{-1}} Y_i, \\ H_i^* &:= C^{(\varepsilon)^{-1}} H_i C^{(\omega)}, \\ G_i^* &:= C^{(\omega)^{-1}} G_i C^{(\omega)}, \\ \varepsilon_i^* &:= C^{(\varepsilon)^{-1}} \varepsilon_i, \\ \omega_i^* &:= C^{(\omega)^{-1}} \omega_i, \\ \beta_i^* &:= C^{(\omega)^{-1}} \beta_i \end{aligned}$$

erhalten wir aus (3.4.1) und (3.4.2):

$$\begin{aligned} Y_i^* &= H_i^* \beta_i^* + \varepsilon_i^*, \\ \beta_i^* &= G_i^* \beta_{i-1}^* + \omega_i^*. \end{aligned}$$

Für die Fehlerprozesse $\{\varepsilon_i^*\}$, $\{\omega_i^*\}$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\varepsilon_i^*) &= \sigma^2 I_\ell, \\ \text{Cov}(\omega_i^*) &= \tau^2 I_p. \end{aligned}$$

Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen:

$$R^{(\varepsilon)} = I_\ell, \quad (3.4.14)$$

$$R^{(\omega)} = I_p. \quad (3.4.15)$$

Bemerkung 3.28. Bei einem State-Space Modell geht man gewöhnlich davon aus, dass gilt:

$$\mathbb{E} \varepsilon_i = \mathbb{E} \omega_i = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Wir haben hierauf bei unserer Modellbildung verzichtet, da diese Forderung Bestandteil unseres Changepoint-Modells ist. Unter der Nullhypothese setzen wir die Zentriertheit der Fehlerprozesse $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ bzw. $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ voraus. Unter der Alternative gehen wir davon aus, dass sich der Erwartungswert eines oder beider Fehlerprozesse im Changepoint verändert (vgl. Abschnitt 3.4.4).

Bemerkung 3.29. Die Fehlerprozesse $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ bzw. $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ müssen nicht Folgen identisch verteilter Zufallsvektoren sein.

Bemerkung 3.30. $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $\{\beta_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ sind i.A. nicht stationär.

3.4.2 Eigenschaften von State-Space Modellen

Bei den in der Literatur (vgl. z.B. [Aok87], [BrDa87], [BrDa91], [Ham94]) diskutierten State-Space Modellen beschränkt man sich gewöhnlich auf Modelle, bei denen die Matrizenfolgen $\{H_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ bzw. $\{G_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ deterministisch sind. Dies entspricht dem oben beschriebenen Modell, wobei die Fehlerprozesse

$$\left\{ \eta_{k_1, k_2}^{(i)} \right\}_{i \in \mathbb{Z}, 1 \leq k_1 \leq \ell, 1 \leq k_2 \leq p} \quad \text{bzw.} \quad \left\{ v_{k_1, k_2}^{(i)} \right\}_{i \in \mathbb{Z}, 1 \leq k_1, k_2 \leq p}$$

identisch null sind.

Darüber hinaus sind bei vielen Anwendungen und Spezialfällen von State-Space Modellen (vgl. Abschnitt 3.4.3) die Matrizen H_i, G_i unabhängig von i , d.h. unabhängig vom Zeitpunkt. Eine wichtige Eigenschaft solcher State-Space Modelle ist Stabilität.

Definition 3.1. Für den Fall, dass $G_i = G \quad \forall i \in \mathbb{Z}$, wobei G deterministisch, heißt die State Equation (3.4.2) stabil (oder kausal), wenn gilt:

$$\det(I_p - Gz) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (3.4.16)$$

Bemerkung 3.31. (3.4.16) ist äquivalent damit, dass alle Eigenwerte von G im Inneren des Einheitskreises liegen.

Bemerkung 3.32. Ist die State Equation stabil, und sind die Fehlerprozesse $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ bzw. $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ zentriert, so hat die Gleichung (3.4.2) die eindeutige stationäre Lösung (vgl. [BrDa91], Abschnitt 12.1):

$$\beta_i = \sum_{j=0}^{\infty} G^j \omega_{i-j-1}.$$

Die Beobachtungen $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ sind ebenfalls stationär, falls man zusätzlich $H_i = H$ für alle $i \in \mathbb{Z}$, wobei H deterministisch, voraussetzt. In diesem Fall können die Beobachtungen wie folgt dargestellt werden:

$$Y_i = \sum_{j=0}^{\infty} H G^j \omega_{i-j-1} + \varepsilon_i.$$

Bemerkung 3.33. Häufig wird in der Literatur eine andere Darstellungsform für State-Space Modelle verwendet. Sei durch (3.4.1)-(3.4.15) ein kausales State-Space Modell mit zentrierten Fehlerprozessen $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ bzw. $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ und über die Zeit konstanten, deterministischen Designmatrizen H, G gegeben.

Dann gibt es für das State-Space Modell eine Darstellung der folgenden Form:

$$Y_i = H\beta_i + \zeta_i, i \in \mathbb{Z}, \quad (3.4.17)$$

$$\beta_i = G\beta_{i-1} + F\zeta_{i-1}, i \in \mathbb{Z}, \text{ wobei} \quad (3.4.18)$$

$$F \in \mathbb{R}^{p \times \ell},$$

ζ_i ℓ -dim. zentrierter Fehlerprozess.

Beweis: S. [BrDa91], Proposition 12.4.1. □

Bemerkung 3.34. In [Aok87], Kapitel 4 wird gezeigt, dass State-Space Modelle der Form (3.4.17), (3.4.18) äquivalent zu ARMA(p,q)-Prozessen sind.

3.4.3 Beispiele für State-Space Modelle

State-Space Modelle sind so allgemein formuliert, dass sich viele andere Modellklassen durch sie ausdrücken lassen. Wir führen in diesem Abschnitt einige Beispiele an (vgl. auch [Aok87] sowie [BrDa91], Kapitel 12).

Beispiel 3.2. (vgl. [Aok87], S.6)

Wir betrachten das folgende lineare Modell:

$$\begin{aligned} Y_i &:= \beta_i' h_i + \varepsilon_i \quad (i \in \mathbb{Z}), \\ \beta_i &:= \alpha' \beta_{i-1} + \omega_i \quad (i \in \mathbb{Z}), \end{aligned}$$

wobei $h_i := (h_i^{(1)}, \dots, h_i^{(p)})' \in \mathbb{R}^p$,

$\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_p)' \in \mathbb{R}^p$,

$\beta_i \in \mathbb{R}^p$,

$\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}, \{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ Folgen p -dimensionaler unabhängiger Zufallsvektoren.

Sei G die Diagonalmatrix, mit den Diagonalelementen $\alpha_1, \dots, \alpha_p$.

und H_i die Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $h_i^{(1)}, \dots, h_i^{(p)}$.

Dann erhalten wir das folgende State-Space Modell:

$$\begin{aligned} Y_i &= H_i \beta_i + \varepsilon_i \quad (i \in \mathbb{Z}), \\ \beta_i &= G \beta_{i-1} + \omega_i \quad (i \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Beispiel 3.3. (vgl. [BrDa91], S.468)

Sei $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ ein kausaler $AR(p)$ -Prozess mit Fehlerprozess $\{\zeta_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ i.i.d.,

$E \zeta_1 = 0$, $\text{Var} \zeta_1 = \sigma^2$:

$$Y_i = \phi_1 Y_{i-1} + \dots + \phi_p Y_{i-p} + \zeta_i \quad (i \in \mathbb{Z}). \quad (3.4.19)$$

Sei

$$G := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 & 1 \\ \phi_p & \phi_{p-1} & \phi_{p-2} & \dots & \phi_2 & \phi_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p},$$

$$H := (0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{1 \times p},$$

$$\omega_i := (0, \dots, 0, \zeta_i)' \in \mathbb{R}^p,$$

$$\beta_i := (Y_{i-p+1}, \dots, Y_i)' \in \mathbb{R}^p.$$

Dann wird durch

$$\begin{aligned} Y_i &= H\beta_i \quad (i \in \mathbb{Z}), \\ \beta_i &= G\beta_{i-1} + \omega_i \quad (i \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

ein State-Space Modell mit deterministischen Matrizen H und G definiert (für Details vgl. [BrDa91], S. 468).

Lassen wir zusätzlich zu, dass ϕ_1, \dots, ϕ_p zufälligen Schwankungen unterliegen, so erhalten wir in (3.4.19) eine autoregressive Zeitreihe mit zufälligen Koeffizienten. Diese können wir analog wie oben zu einem State-Space Modell mit deterministischer Matrix H in der Observation Equation und zufälliger Matrix G in der State Equation umformen.

Eine Einführung in die Theorie der autoregressiven Zeitreihen mit zufälligen Koeffizienten (RCA="Random Coefficient Autoregressive") findet man in [NiQu82].

Beispiel 3.4. (vgl. [BrDa91], S.469)

Sei $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ ein kausaler ARMA(p, q)-Prozess mit Fehlerprozess $\{\zeta_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $E \zeta_i = 0$, $\text{Var} \zeta_i = \sigma^2$:

$$Y_i = \phi_1 Y_{i-1} + \dots + \phi_p Y_{i-p} + \zeta_i + \theta_1 \zeta_{i-1} + \dots + \theta_q \zeta_{i-q} \quad (i \in \mathbb{Z}). \quad (3.4.20)$$

Sei $r := \max\{p, q+1\}$, $\phi_j := 0 \quad \forall j > q$, $\theta_j := 0 \quad \forall j > p$, $\theta_0 = 1$,

$$\beta_i := (Y_{i-r+1}, \dots, Y_i)' \in \mathbb{R}^r,$$

$$G := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 1 \\ \phi_r & \phi_{p-1} & \phi_{r-2} & \dots & \phi_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times r},$$

$$H := (\theta_{r-1}, \theta_{r-2}, \dots, \theta_1, 1),$$

$$\omega_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \zeta_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^r.$$

Dann wird durch

$$\begin{aligned} Y_i &= H\beta_i, \\ \beta_i &= G\beta_{i-1} + \omega_i \end{aligned}$$

ein State-Space Modell definiert (für Details vgl. [BrDa91], S.469).

Lassen wir zusätzlich zu, dass ϕ_1, \dots, ϕ_p bzw. $\theta_1, \dots, \theta_q$ zufälligen Schwankungen unterliegen, so erhalten wir ein State-Space Modell mit zufälliger Matrix G in der State Equation bzw. H in der Observation Equation.

Bemerkung 3.35. Weitere Beispiele für State-Space Modelle findet man z.B. in [BrDa91], Kapitel 12 sowie in [Aok87].

3.4.4 Changepoint-Modelle

Wir betrachten das durch (3.4.1)-(3.4.15) gegebene State-Space Modell und definieren die drei folgenden Changepoint-Modelle.

Changepoint-Modell 1

Unser 1. Changepoint-Modell betrachtet Veränderungen in der State Equation:

$$\begin{aligned} H_0: \quad & \mathbb{E} \varepsilon_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ & \mathbb{E} \omega_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ \\ H_A^{(1)}: \quad & \exists 1 \leq k^* < n, \delta_1 = \delta_1(n) \in \mathbb{R}^p, \|\delta_1\| \neq 0 : \\ & 0 = \mathbb{E} \omega_1 = \dots = \mathbb{E} \omega_{k^*} \neq \mathbb{E} \omega_{k^*+1} = \dots = \mathbb{E} \omega_n = \delta_1, \\ & \mathbb{E} \varepsilon_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.36. *Im 1. Changepoint-Modell testen wir auf Veränderungen im Mittelwert von $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Das heißt, wir überprüfen die State Equation. Dies ist aus unserer Sicht der für praktische Anwendungen bedeutsamste Fall. Man beobachtet Realisierungen einer Zielgröße, deren Wert von dem Zustand (State) des Systems und einem zufälligen Fehlerprozess $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ abhängt. Von Interesse ist, ob und wann sich der Zustand des Systems verändert. Eine Veränderung von δ_1 kann eine Veränderung in der State Equation bewirken. Diese kann sich auch auf die Observation Equation auswirken. Dabei bedeutet $\delta_1^{(j)} \neq 0$, $\delta_1^{(m)} = 0 \quad \forall m \neq j, 1 \leq m \leq p$ nicht, dass sich die Veränderung nur auf die j -te Komponente der $\{\beta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ bzw. der Beobachtungen $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ auswirkt. Vielmehr sind die Auswirkungen einer Veränderung des Fehlerprozesses $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ maßgeblich von den Matrizenfolgen $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ bzw. $\{H_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ abhängig.*

Changepoint-Modell 2

Analog zum 1. Changepoint-Modell betrachten wir im 2. Modell Veränderungen in der Observation Equation:

$$\begin{aligned} H_0: \quad & \mathbb{E} \varepsilon_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ & \mathbb{E} \omega_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ \\ H_A^{(2)}: \quad & \exists 1 \leq k^* < n, \delta_2 = \delta_2(n) \in \mathbb{R}^\ell, \|\delta_2\| \neq 0 : \\ & 0 = \mathbb{E} \varepsilon_1 = \dots = \mathbb{E} \varepsilon_{k^*} \neq \mathbb{E} \varepsilon_{k^*+1} = \dots = \mathbb{E} \varepsilon_n = \delta_2, \\ & \mathbb{E} \omega_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.37. *Eine Veränderung im Mittelwert des Fehlerprozesses $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ wirkt sich nicht auf die $\{\beta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, sondern nur auf die Beobachtungen $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ aus. Die Auswirkung eines Changepoints im Fehlerprozess $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ auf die Beobachtungen ist maßgeblich abhängig von der Matrizenfolge $\{H_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Unser zweites Changepoint-Modell ist analog zum 1. Changepoint-Modell gewählt. Die im folgenden Abschnitt 3.4.5 konzipierten Teststatistiken sind unabhängig vom speziellen Changepoint-Modell definiert. Das asymptotische Verhalten der Teststatistiken ist in beiden Fällen analog.*

Changepoint-Modell 3

Analog zu den ersten beiden Changepoint-Modellen betrachten wir im 3. Modell Veränderungen in der Observation Equation und/oder der State Equation:

$$\begin{aligned} H_0: \quad & \mathbb{E} \varepsilon_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ & \mathbb{E} \omega_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_A^{(3)}: \quad & \exists 1 \leq k^* < n, \delta_1 = \delta_1(n) \in \mathbb{R}^p, \delta_2 = \delta_2(n) \in \mathbb{R}^\ell, \|\delta_1\|, \|\delta_2\| \text{ nicht beide } 0 : \\ & \mathbb{E} \omega_1 = \dots = \mathbb{E} \omega_{k^*} = 0, \mathbb{E} \omega_{k^*+1} = \dots = \mathbb{E} \omega_n = \delta_1, \\ & \mathbb{E} \varepsilon_1 = \dots = \mathbb{E} \varepsilon_{k^*} = 0, \mathbb{E} \varepsilon_{k^*+1} = \dots = \mathbb{E} \varepsilon_n = \delta_2. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.38. Unser drittes Changepoint-Modell umfasst Änderungen in einem der beiden Fehlerprozesse sowie simultane Änderungen in beiden Fehlerprozessen. $H_A^{(3)}$ beinhaltet also die beiden Alternativen $H_A^{(1)}$ und $H_A^{(2)}$. Die Teststatistiken und ihre asymptotischen Eigenschaften sind analog zu den beiden ersten Changepoint-Modellen.

3.4.5 Konstruktion von Teststatistiken

Die Vorgehensweise zur Konstruktion von Teststatistiken für unser Changepoint Problem ist die folgende:

Wir definieren eine Folge von Zufallsvektoren $\{\Delta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, die von den Fehlerprozessen $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ und $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ abhängig ist. Mit $\{\Delta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ konstruieren wir Teststatistiken zur Überprüfung der oben definierten Changepoint-Modelle.

Zur Herleitung asymptotischer Eigenschaften approximieren wir

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i \quad \text{durch} \quad \sum_{i=1}^n Z_i,$$

wobei $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge i.i.d. normalverteilter ℓ -dimensionaler Zufallsvektoren ist.

Die Approximationsrate erweist sich unter geeigneten Regularitätsvoraussetzungen als gut genug, dass wir unter Verwendung der Δ_i ($i \in \mathbb{N}$) Teststatistiken konstruieren können, die sich asymptotisch wie Teststatistiken verhalten, die auf unabhängig identisch (normalverteilten) Zufallsvektoren basieren.

Wir definieren für $i \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \Delta_i &:= Y_i - Q_i Y_{i-1}, \\ \tilde{\Delta}_i &:= \varepsilon_i - Q_i \varepsilon_{i-1}. \end{aligned}$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} \Delta_i &\stackrel{(3.4.1)}{=} H_i \beta_i + \varepsilon_i - Q_i H_{i-1} \beta_{i-1} - Q_i \varepsilon_{i-1} \\ &= H_i \beta_i - H_i G_i \beta_{i-1} + \tilde{\Delta}_i \\ &\stackrel{(3.4.2)}{=} H_i \omega_i + \tilde{\Delta}_i. \end{aligned} \tag{3.4.21}$$

Theorem 3.11. *Es sei das durch (3.4.1)-(3.4.15) definierte State-Space Modell unter H_0 gegeben. σ^2, τ^2 seien nicht beide 0. Dann gibt es eine Folge i.i.d. normalverteilter zentrierter ℓ -dimensionaler Zufallsvektoren $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\text{Cov } Z_1 = \sigma^2 A + \tau^2 B$, so dass*

$$\max_{1 < k \leq n} \frac{\left\| \sum_{i=1}^k \Delta_i - \sum_{i=1}^k Z_i \right\|}{k^{\frac{1}{2}} (\log k)^{-\lambda}} \stackrel{P-f.s.}{=} o(1) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.4.22)$$

und es gibt für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge i.i.d. normalverteilter zentrierter ℓ -dimensionaler Zufallsvektoren $\{Z_i^{\{n\}}\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\text{Cov } Z_1^{(n)} = \sigma^2 A + \tau^2 B$, so dass

$$\max_{1 \leq k < n-1} \frac{\left\| \sum_{i=k+1}^n \Delta_i - \sum_{i=k+1}^n Z_i^{(n)} \right\|}{(n-k)^{\frac{1}{2}} (\log(n-k))^{-\lambda}} \stackrel{P-f.s.}{=} o(1) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.4.23)$$

für ein $\lambda > 0$.

Beweis: Der Beweis von Theorem 3.11 beruht auf einer Anwendung von Theorem 2.4. Wir betrachten:

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i = -Q_1 \varepsilon_0 + \varepsilon_n + \sum_{i=1}^n H_i \omega_i + \sum_{i=1}^{n-1} (I_\ell - Q_{i+1}) \varepsilon_i. \quad (3.4.24)$$

$$\text{Gelte zunächst } \sigma^2, \tau^2 \neq 0. \quad (3.4.25)$$

Es gilt für eine Konstante const_{23} :

$$\max_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \|H_i \omega_i\|^{2+\delta} \stackrel{(3.4.6), (3.4.8), (3.4.15)}{\leq} \text{const}_{23} \quad (3.4.26)$$

Weiter gilt:

$$\min_{i \in \mathbb{Z}} \left(\mathbb{E} \|H_i \omega_i\|^2 \right)^{\frac{2+\delta}{2}} \stackrel{(3.4.11), (3.4.15), (3.4.25)}{\geq} \left(\text{const}_{22} \tau^2 \right)^{\frac{2+\delta}{2}}, \quad (3.4.27)$$

$$\max_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \|H_i \omega_i\|^{2+\delta} \stackrel{(3.4.26), (3.4.27)}{\leq} \frac{\text{const}_{23}}{(\text{const}_{22} \tau^2)^{\frac{2+\delta}{2}}} \left(\mathbb{E} \|H_i \omega_i\|^2 \right)^{\frac{2+\delta}{2}}. \quad (3.4.28)$$

Aus (3.4.5), (3.4.13), (3.4.15) folgt mit dem Satz von Beppo Levi:

$$\frac{1}{n} \text{Cov} \sum_{i=1}^n H_i \omega_i = \tau^2 B + o\left((\log n)^{-\vartheta}\right) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.4.29)$$

Mit Theorem 2.4 folgt wegen (3.4.28), (3.4.29):

Es gibt eine Folge i.i.d. normalverteilter zentrierter ℓ -dimensionaler Zufallsvektoren $\{\bar{Z}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\text{Cov } \bar{Z}_1 = \tau^2 B$, so dass gilt:

$$\max_{1 < k \leq n} \frac{\left\| \sum_{i=1}^k H_i \omega_i - \sum_{i=1}^k \bar{Z}_i \right\|}{k^{\frac{1}{2}} (\log k)^{-\lambda_1}} \stackrel{P-f.s.}{=} o(1) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.4.30)$$

für ein $\lambda_1 > 1$.

Analog erhalten wir:

Es gibt eine Folge i.i.d. normalverteilter zentrierter ℓ -dimensionaler Zufallsvektoren $\{\tilde{Z}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\tilde{Z}_1 = \sigma^2 A$, so dass gilt:

$$\max_{1 < k < n} \frac{\left\| \sum_{i=1}^k (I_\ell - Q_{i+1}) \varepsilon_i - \sum_{i=1}^k \tilde{Z}_i \right\|}{k^{\frac{1}{2}} (\log k)^{-\lambda_2}} \stackrel{P-f.s.}{=} o(1) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.4.31)$$

für ein $\lambda_2 > 1$.

Aus (3.4.24) (3.4.30), (3.4.31) folgt (3.4.22). (3.4.23) erhalten wir analog.

Wir betrachten nun den Fall $\sigma^2 = 0, \tau^2 \neq 0$.

Wegen der Zentriertheit von $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ folgt:

$$\varepsilon_i \stackrel{P-f.s.}{=} 0. \quad (3.4.32)$$

Wie oben folgt (3.4.30).

Aus (3.4.24), (3.4.30), (3.4.32) folgt (3.4.22).

(3.4.23) erhalten wir analog.

Der Fall $\sigma^2 \neq 0, \tau^2 = 0$ folgt analog. \square

Wir setzen im Folgenden stets voraus, dass gilt:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (I_\ell + Q_j)(I_\ell + Q_j)', \quad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n H_j H_j' \quad P\text{-f.s. positiv definit.} \quad (3.4.33)$$

Weiter setzen wir voraus, dass

$$\sigma^2, \tau^2 \text{ nicht beide verschwinden,} \quad (3.4.34)$$

$$\text{bzw. dass } \hat{\sigma}_n^2, \hat{\tau}_n^2 \text{ nicht beide verschwinden.} \quad (3.4.35)$$

D_n sei so gewählt, dass

$$C_n = D_n' D_n, \text{ wobei } C_n := \sigma^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (I_\ell + Q_i)(I_\ell + Q_i)' + \tau^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H_i H_i'. \quad (3.4.36)$$

D_n sei die obere Dreiecksmatrix der Cholesky-Zerlegung (3.4.36) von C_n . Diese existiert und ist eindeutig bestimmt, da C_n positiv definit ist.

Sei weiter \hat{D}_n so gewählt, dass

$$\hat{C}_n = \hat{D}_n' \hat{D}_n, \quad (3.4.37)$$

$$\hat{C}_n = \hat{C}_n := \hat{\sigma}_n^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (I_\ell + Q_i)(I_\ell + Q_i)' + \hat{\tau}_n^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H_i H_i',$$

wobei $\hat{\sigma}_n^2, \hat{\tau}_n^2$ Schätzer für σ^2, τ^2 seien.

\hat{D}_n sei die eindeutig bestimmte obere Dreiecksmatrix der Cholesky-Zerlegung (3.4.37) von \hat{C}_n .

Bemerkung 3.39. Unter (3.4.12), (3.4.13), (3.4.33), (3.4.34) gilt mit den obigen Bezeichnungen für $n \rightarrow \infty$:

$$\|D_n^{-1} - M^{-1}\| \stackrel{P-f.s.}{=} o\left((\log n)^{-\frac{\vartheta}{2}}\right), \quad (3.4.38)$$

$$\|D_n^{-1}\| \stackrel{P-f.s.}{=} \mathcal{O}(1), \quad (3.4.39)$$

wobei M die eindeutig bestimmte obere Dreiecksmatrix der Cholesky-Zerlegung von $\sigma^2 A + \tau^2 B$ sei.

Beweis: Aus (3.4.12), (3.4.13) folgt:

$$\|D'_n D_n - \sigma^2 A + \tau^2 B\| \stackrel{P-f.s.}{=} o\left((\log n)^{-\vartheta}\right) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.4.40)$$

$$\begin{aligned} \text{Sei} \quad D_n &:= (d_{ij}) \quad 1 \leq i, j \leq \ell, \\ M &:= (m_{ij}) \quad 1 \leq i, j \leq \ell. \end{aligned}$$

Da sowohl M als auch D_n obere Dreiecksmatrizen sind, folgt aus (3.4.40):

$$\max_{1 \leq i, j, r \leq \ell} \left| \sum_{i=1}^{\min\{j, r\}} m_{ij} m_{i, r} - \sum_{i=1}^{\min\{j, r\}} d_{ij} d_{i, r} \right| \stackrel{P-f.s.}{=} o\left((\log n)^{-\frac{\vartheta}{2}}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Durch Auflösen dieses Gleichungssystems mit ℓ^2 Gleichungen folgt unter Beachtung von $d_{ii} \geq 0$ sowie $m_{ii} \geq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq \ell$, $n \in \mathbb{N}$ insbesondere:

$$\max_{1 \leq i, j \leq \ell} |d_{ij} - m_{ij}| \stackrel{P-f.s.}{=} o\left((\log n)^{-\frac{\vartheta}{2}}\right) \quad (n \rightarrow \infty)$$

und damit:

$$\|D_n - M\| \stackrel{P-f.s.}{=} o\left((\log n)^{-\frac{\vartheta}{2}}\right) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.4.41)$$

Aus (3.4.41) ergibt sich mit Lemma 7.6 (3.4.38). (3.4.39) folgt aus (3.4.38). \square

Wir definieren Teststatistiken analog zu einer Teststatistik, die für den Fall unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen bzw. Zufallsvektoren häufig verwendet wird:

$$T_3(n) := \max_{1 \leq k < n} \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| D_n^{-1} \left(\sum_{i=1}^k \Delta_i - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i \right) \right\|,$$

$$T_3^*(n) := \max_{1 \leq k < n} \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \hat{D}_n^{-1} \left(\sum_{i=1}^k \Delta_i - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i \right) \right\|.$$

Neben der Teststatistik T_3 , in die alle Komponenten der Zufallsvektoren Δ_i einfließen, definieren wir analog folgende Teststatistik, die die einzelnen Komponenten betrachtet:

$$T_4(j, n) := \max_{1 \leq k < n} \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \left(D_n^{-1} \left(\sum_{i=1}^k \Delta_i - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i \right) \right)^{(j)} \right| \quad (1 \leq j \leq \ell),$$

$$T_4^*(j, n) := \max_{1 \leq k < n} \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \left(\hat{D}_n^{-1} \left(\sum_{i=1}^k \Delta_i - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i \right) \right)^{(j)} \right| \quad (1 \leq j \leq \ell).$$

Bemerkung 3.40. Es gelte (3.4.12), (3.4.13), (3.4.33), (3.4.34), (3.4.35) sowie

$$|\sigma^2 - \hat{\sigma}_n^2| = o_P(f(n)) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.4.42)$$

$$|\tau^2 - \hat{\tau}_n^2| = o_P(f(n)) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.4.43)$$

für ein $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = \mathcal{O}(1)$. Dann folgt:

$$\left\| \hat{D}_n^{-1} - M^{-1} \right\| = o_P \left(\sqrt{f(n)} + (\log n)^{-\frac{\vartheta}{2}} \right) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.4.44)$$

$$\left\| \hat{D}_n^{-1} \right\| = \mathcal{O}_P(1) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.4.45)$$

Beweis: Aus (3.4.42), (3.4.43) folgt mit (3.4.12) und (3.4.13):

$$\left\| \hat{D}_n' \hat{D}_n - \sigma^2 A + \tau^2 B \right\| = o_P \left(f(n) + (\log n)^{-\vartheta} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.4.46)$$

Analog wie im Beweis zu Bemerkung 3.39 erhalten wir damit:

$$\left\| \hat{D}_n^{-1} - M^{-1} \right\| = o_P \left(\sqrt{f(n)} + (\log n)^{-\frac{\vartheta}{2}} \right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

□

3.4.6 Asymptotisches Verhalten der Teststatistiken

Theorem 3.12. Es sei das durch (3.4.1)-(3.4.15) definierte State-Space Modell unter H_0 gegeben. Weiter gelte (3.4.33) sowie (3.4.34). Dann folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(a(\log n)T_3(n) \leq t + d_\ell(\log n)) = \exp(-2 \exp(-t)) \quad (3.4.47)$$

und für $1 \leq j \leq \ell$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(a(\log n)T_4(j, n) \leq t + d_1(\log n)) = \exp(-2 \exp(-t)), \quad (3.4.48)$$

wobei a , d_ℓ , d_1 wie in Theorem 2.7 definiert sind.

Beweis: Der Beweis verläuft ähnlich zum Beweis von Theorem 2.9.

Mit Theorem 3.11 erhalten wir:

Es gibt eine Folge i.i.d. normalverteilter zentrierter ℓ -dimensionaler Zufallsvektoren $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\text{Cov } Z_1 = \sigma^2 A + \tau^2 B$, so dass gilt:

$$\max_{1 < k \leq n} \frac{\left\| \sum_{i=1}^k \Delta_i - \sum_{i=1}^k Z_i \right\|}{k^{\frac{1}{2}} (\log k)^{-\lambda_1}} \stackrel{P-f.s.}{=} o(1) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.4.49)$$

und es gibt für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge i.i.d. normalverteilter zentrierter ℓ -dimensionaler Zufallsvektoren $\{Z_i^{(n)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\text{Cov } Z_1^{(n)} = \sigma^2 A + \tau^2 B$, so dass gilt:

$$\max_{1 \leq k < n-1} \frac{\left\| \sum_{i=k+1}^n \Delta_i - \sum_{i=k+1}^n Z_i^{(n)} \right\|}{(n-k)^{\frac{1}{2}} (\log(n-k))^{-\lambda_1}} \stackrel{P-f.s.}{=} o(1) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.4.50)$$

für ein $\lambda_1 > 1$.

Mit Bemerkung 3.39 und dem Satz vom Iterierten Logarithmus für i.i.d. Zufallsvektoren folgt mit den Bezeichnungen aus Bemerkung 3.39 für $k, n \rightarrow \infty$, $k \leq n$:

$$\begin{aligned} \left\| D_n^{-1} \sum_{i=1}^k Z_i - M^{-1} \sum_{i=1}^k Z_i \right\| &\stackrel{(3.4.38)}{=} o_P \left(\sqrt{k \log \log k} \sqrt{(\log n)^{-\vartheta}} \right) \\ &= o_P \left(\sqrt{k} (\log n)^{-\lambda_2} \right) \end{aligned} \quad (3.4.51)$$

für ein $\lambda_2 > 1$.

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\left\| D_n^{-1} \sum_{i=1}^k \Delta_i - M^{-1} \sum_{i=1}^k Z_i \right\| \\ &\stackrel{(3.4.51)}{=} \left\| D_n^{-1} \sum_{i=1}^k \Delta_i - D_n^{-1} \sum_{i=1}^k Z_i \right\| + o_P \left(\sqrt{k} (\log n)^{-\lambda_2} \right) \\ &\stackrel{(3.4.49), (3.4.39)}{=} o_P \left(\sqrt{k} (\log k)^{-\lambda_3} \right) \quad (k, n \rightarrow \infty, k \leq n) \end{aligned} \quad (3.4.52)$$

für $\lambda_3 := \min(\lambda_1, \lambda_2) > 1$.

Analog zu (3.4.52) folgt mit (3.4.50):

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Folge i.i.d. normalverteilter zentrierter ℓ -dimensionaler Zufallsvektoren $\{Z_i^{(n)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\text{Cov } Z_1^{(n)} = \sigma^2 A + \tau^2 B$, so dass gilt:

$$\left\| D_n^{-1} \sum_{i=k+1}^n \Delta_i - M^{-1} \sum_{i=k+1}^n Z_i^{(n)} \right\| = o_P \left(\sqrt{n-k} (\log(n-k))^{-\lambda_4} \right) \quad (3.4.53)$$

für ein $\lambda_4 > 1$, $n - k \rightarrow \infty$.

Sei für $t \geq 1$: $S_i(t) := D_n^{-1} \sum_{j=1}^{[t]} \Delta_j^{(i)} \quad (1 \leq i \leq \ell),$

$$S_i^*(t) = S_i^{*(n)}(t) := D_n^{-1} \sum_{j=[t+1]}^n \Delta_j^{(i)} \quad (1 \leq i \leq \ell).$$

Dann folgt mit (3.4.52): Es gibt ℓ unabhängige Wiener-Prozesse

$$\left\{ W_1^{(1)}(t) \right\}_{t \geq 0}, \dots, \left\{ W_\ell^{(1)}(t) \right\}_{t \geq 0},$$

so dass gilt:

$$\max_{1 \leq i \leq p} \sup_{1 < t \leq \frac{n}{2}} \frac{|S_i(t) - W_i^{(1)}(t)|}{\sqrt{t}(\log t)^{-\lambda_3}} = o_P(1) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.4.54)$$

Analog folgt mit (3.4.53): Es gibt für jedes $n \in \mathbb{N}$ ℓ unabhängige (auch von den oben definierten ℓ Wiener-Prozessen unabhängige) Wiener-Prozesse

$$\left\{ W_1^{(2,n)}(t) \right\}_{t \geq 0}, \dots, \left\{ W_\ell^{(2,n)}(t) \right\}_{t \geq 0},$$

so dass gilt:

$$\max_{1 \leq i \leq p} \sup_{1 \leq t \leq \frac{n}{2}} \frac{|S_i^*(t) - W_i^{(2,n)}(n-t)|}{\sqrt{n-t}(\log(n-t))^{-\lambda_4}} = o_P(1) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.4.55)$$

Sei

$$B_{i,n}(s) := \begin{cases} n^{-\frac{1}{2}} \left(W_i^{(1)}(ns) - \left(W_i^{(1)}\left(\frac{n}{2}\right) + W_i^{(2,n)}\left(\frac{n}{2}\right) \right) \right) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ n^{-\frac{1}{2}} \left(-W_i^{(2,n)}(n - ns) + (1-s) \left(W_i^{(1)}\left(\frac{n}{2}\right) + W_i^{(2,n)}\left(\frac{n}{2}\right) \right) \right) & \frac{1}{2} < s \leq 1. \end{cases}$$

Dann ist $B_{i,n}$ eine Brownsche Brücke.

Es gilt:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\sum_{i=1}^p \left((s(1-s))^{-\frac{1}{2}} B_{i,n}(s) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mid 0 < s < 1 \right\} \\ & \stackrel{\mathcal{D}}{=} \left\{ N \left(\log \frac{s}{1-s} \right), 0 < s < 1 \right\}, \end{aligned} \quad (3.4.56)$$

wobei $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ wie in Theorem 2.8 definiert ist.

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
 & \sup_{\log n \leq t \leq \frac{n}{2}} \left| \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{n}{t(n-t)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(S_i(t) - \frac{t}{n} S_i(n) \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
 & \quad \left. - \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{1}{\frac{t}{n}(1-\frac{t}{n})} \right)^{\frac{1}{2}} B_{i,n} \left(\frac{t}{n} \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| \\
 &= \sup_{\log n \leq t \leq \frac{n}{2}} \left| \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{n}{t(n-t)} \right)^{\frac{1}{2}} \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left(S_i(t) - \frac{t}{n} \left(S_i \left(\frac{n}{2} \right) + S_i^* \left(\frac{n}{2} \right) \right) \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad \left. - \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{1}{\frac{t}{n}(1-\frac{t}{n})} \right)^{\frac{1}{2}} B_{i,n} \left(\frac{t}{n} \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| \\
 & \stackrel{(3.4.54), (3.4.55)}{=} \sup_{\log n \leq t \leq \frac{n}{2}} \left| \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{n}{t(n-t)} \right)^{\frac{1}{2}} \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left(W_i^{(1)}(t) - \frac{t}{n} \left(W_i^{(1)} \left(\frac{n}{2} \right) + W_i^{(2,n)} \left(\frac{n}{2} \right) \right) \right) \right)^2 \\
 & \quad + o_P \left((\log t)^{-\lambda_3} \left(\frac{n}{n-t} \right)^{\frac{1}{2}} + (\log n)^{-\lambda_4} \left(\frac{t}{n-t} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad \left. - \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{1}{\frac{t}{n}(1-\frac{t}{n})} \right)^{\frac{1}{2}} B_{i,n} \left(\frac{t}{n} \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| \\
 & \stackrel{S.v. Iter. Log.}{=} o_P \left((\log \log n)^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (n \rightarrow \infty) \tag{3.4.57}
 \end{aligned}$$

und analog (vgl. (2.0.24)):

$$\begin{aligned}
 & \sup_{\frac{n}{2} < t \leq n - \log n} \left| \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{n}{t(n-t)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(S_i(t) - \frac{t}{n} S_i(n) \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
 & \quad \left. - \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{1}{\frac{t}{n}(1-\frac{t}{n})} \right)^{\frac{1}{2}} B_{i,n} \left(\frac{t}{n} \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| \\
 &= o_P \left((\log \log n)^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \tag{3.4.58}
 \end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
 & \sup_{1 \leq t \leq \log n} \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{n}{t(n-t)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(S_i(t) - \frac{t}{n} S_i(n) \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \stackrel{(3.4.52), (3.4.53)}{=} \sup_{1 \leq t \leq \log n} \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{n}{t(n-t)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{[t]} Z_i - \frac{t}{n} \sum_{i=1}^n Z_i \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \mathcal{O}_P(1) \\
 & \stackrel{S. v. Iter. Log.}{=} \mathcal{O}_P \left((\log \log \log n)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \tag{3.4.59}
 \end{aligned}$$

Analog folgt, wiederum mit dem Satz vom Iterierten Logarithmus:

$$\begin{aligned}
 & \sup_{n - \log n \leq t < n} \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{n}{t(n-t)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(S_i(t) - \frac{t}{n} S_i(n) \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & = \mathcal{O}_P \left((\log \log \log n)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (n \rightarrow \infty), \tag{3.4.60}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sup_{1 \leq t \leq \log n} \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{n}{t(n-t)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(B_{i,n} \left(\frac{t}{n} \right) \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & = \mathcal{O}_P \left((\log \log \log n)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (n \rightarrow \infty), \tag{3.4.61}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sup_{n - \log n \leq t < n} \left(\sum_{i=1}^p \left(\left(\frac{n}{t(n-t)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(B_{i,n} \left(\frac{t}{n} \right) \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & = \mathcal{O}_P \left((\log \log \log n)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \tag{3.4.62}
 \end{aligned}$$

Aus (3.4.56)-(3.4.62) folgt analog wie im Beweis zu Theorem 2.9 mit Theorem 2.8 die Behauptung. \square

Bemerkung 3.41. Gilt für Schätzer $\hat{\sigma}_n^2$, $\hat{\tau}_n^2$ (3.4.35) sowie

$$|\sigma^2 - \hat{\sigma}_n^2| = o_P((\log \log n)^{-2}) \quad (n \rightarrow \infty), \tag{3.4.63}$$

$$|\tau^2 - \hat{\tau}_n^2| = o_P((\log \log n)^{-2}) \quad (n \rightarrow \infty), \tag{3.4.64}$$

so kann man die Teststatistiken $T_3(n)$ bzw. $T_4(j, n)$ in Theorem 3.12 durch $T_3^*(n)$ bzw. $T_4^*(j, n)$ ersetzen.

Beweis: Mit Theorem 3.11 und dem Satz vom Iterierten Logarithmus für unabhängige Zufallsvektoren folgt für $n \rightarrow \infty$:

$$\max_{1 \leq k < n} \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_{i=1}^k \Delta_i - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i \right\| = \mathcal{O}_P \left((\log \log n)^{\frac{1}{2}} \right). \tag{3.4.65}$$

Mit Bemerkung 3.39 und Bemerkung 3.40 folgt:

$$\left\| D_n - \hat{D}_n \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o((\log \log n)^{-1}) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.4.66)$$

Aus (3.4.65), (3.4.66) erhalten wir:

$$\|T_3(n) - T_3^*(n)\| = o_P \left((\log \log n)^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.4.67)$$

$$|T_4(j, n) - T_4^*(j, n)| = o_P \left((\log \log n)^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.4.68)$$

Mit (3.4.67) bzw. (3.4.68) folgt die Behauptung. \square

Wir betrachten das Verhalten der Teststatistiken T_3 bzw. T_4 unter der Alternative $H_A^{(3)}$, die die Alternativen $H_A^{(1)}$ sowie $H_A^{(2)}$ umfasst.

Theorem 3.13. *Es sei das durch (3.4.1)-(3.4.15) definierte State-Space Modell unter $H_A^{(3)}$ gegeben. Weiter gelten (3.4.33), (3.4.34).*

Gilt für $n \rightarrow \infty$:

$$\left(\frac{k^*}{(n - k^*)n \log \log n} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_{i=k^*+1}^n H_i \delta_1 + \sum_{i=k^*+1}^n (I_\ell - Q_i) \delta_2 \right\| \xrightarrow{P} \infty, \quad (3.4.69)$$

dann folgt:

$$\frac{T_3(n)}{(\log \log n)^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{P} \infty \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.4.70)$$

Gilt statt (3.4.69) für $n \rightarrow \infty$:

$$\left(\frac{k^*}{(n - k^*)n \log \log n} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \left(\sum_{i=k^*+1}^n H_i \delta_1 + \sum_{i=k^*+1}^n (I_\ell - Q_i) \delta_2 \right)^{(j)} \right| \xrightarrow{P} \infty \quad (3.4.71)$$

für ein j ($1 \leq j \leq \ell$),

dann folgt:

$$\frac{T_4(j, n)}{(\log \log n)^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{P} \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{n}{k^*(n - k^*)} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \left(D_n^{-1} \sum_{i=1}^{k^*} \Delta_i - \frac{k^*}{n} D_n^{-1} \sum_{i=1}^n \Delta_i \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{k^*}{n} D_n^{-1} \left(\sum_{i=k^*+1}^n H_i \delta_1 + \sum_{i=k^*+1}^n (I_\ell - Q_i) \delta_2 \right) \right\| \\ & \stackrel{\text{Th. 3.11, S. v. Iter. Log., Bem. 3.39}}{=} \mathcal{O}_P \left((\log \log n)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (3.4.72)$$

Mit (3.4.69) folgt aus (3.4.72) (3.4.70).

(3.4.72) erhalten wir analog mit (3.4.71). \square

Bemerkung 3.42. Gilt für die Schätzer $\hat{\sigma}_n$ und $\hat{\tau}_n$:

$$|\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2| = o_P(1) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.4.73)$$

$$|\hat{\tau}_n^2 - \tau^2| = o_P(1) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.4.74)$$

so kann man in Theorem 3.13 $T_3(n)$ durch $T_3^*(n)$ und $T_4(j, n)$ durch $T_4^*(j, n)$ ersetzen.

Beweis: Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Theorem 3.13.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{n}{k^*(n - k^*)} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \left(\hat{D}_n^{-1} \sum_{i=1}^{k^*} \Delta_i - \frac{k^*}{n} \hat{D}_n^{-1} \sum_{i=1}^n \Delta_i \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{k^*}{n} \hat{D}_n^{-1} \left(\sum_{i=k^*+1}^n H_i \delta_1 + \sum_{i=k^*+1}^n (I_\ell - Q_i) \delta_2 \right) \right\| \\ & \stackrel{\text{Th. 3.11, S. v. Iter. Log., Bem. 3.40}}{=} \mathcal{O}_P \left((\log \log n)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (3.4.75)$$

Mit (3.4.69) folgt aus (3.4.75) (3.4.70) mit T_3^* statt T_3 .

(3.4.72) mit T_4^* statt T_4 erhalten wir analog mit (3.4.71). \square

3.4.7 Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints

Wir betrachten zunächst einen komponentenweisen Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints:

$$\begin{aligned} \hat{k}_j &:= \inf \left\{ k \left| \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{i=1}^k \Delta_i^{(j)} - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i^{(j)} \right| \right. \right. \\ & \quad \left. \left. = \max_{1 \leq k < n} \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{i=1}^k \Delta_i^{(j)} - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i^{(j)} \right| \right\} \quad (1 \leq j \leq \ell). \end{aligned}$$

Theorem 3.14. Es sei das durch (3.4.1)-(3.4.15) definierte State-Space Modell unter $H_A^{(3)}$ gegeben, $1 \leq j \leq \ell$. Es gelten (3.4.33) und:

$$k^* = [n\tau] \quad \text{für ein } 0 < \tau < 1, \quad (3.4.76)$$

$\exists \bar{\delta} = \bar{\delta}(n) \in \mathbb{R}$, so dass für $n \rightarrow \infty$ gilt:

$$\max_{k^* < i < n} \left| (H_i \delta_1 + (I_\ell - Q_i) \delta_2)^{(j)} - \bar{\delta} \right| = o_P \left(n^{-\frac{1}{2}} \right), \quad (3.4.77)$$

$$|\bar{\delta}| \rightarrow 0, \quad \left(\frac{n}{\log \log n} \right)^{\frac{1}{2}} |\bar{\delta}| \rightarrow \infty. \quad (3.4.78)$$

Dann folgt:

$$\left| \hat{k}_j - k^* \right| = \mathcal{O}_P \left(\frac{1}{\bar{\delta}^2} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.4.79)$$

Beweis: Sei für $1 \leq k < n$:

$$U_{k,j} = U_{k,j}(n) := \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^k \Delta_i^{(j)} - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i^{(j)} \right).$$

Mit Theorem 3.11 und dem Satz vom Iterierten Logarithmus erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq k^*} \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \left(\frac{k(n-k)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} U_{k,j} + \frac{k}{n} \left(\sum_{i=k^*+1}^n (H_i \delta_1 + (I_\ell - Q_i) \delta_2) \right)^{(j)} \right| \\ &= \mathcal{O}_P \left((\log \log n)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (3.4.80)$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq k^*} |U_{k,j}| \\ & \stackrel{(3.4.80)}{=} \left(\frac{k^*}{n(n-k^*)} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \left(\sum_{i=k^*+1}^n (H_i \delta_1 + (I_\ell - Q_i) \delta_2) \right)^{(j)} \right| \\ & \quad + \mathcal{O}_P \left((\log \log n)^{\frac{1}{2}} \right) \\ & \stackrel{(3.4.76)-(3.4.78)}{=} (\tau(1-\tau))^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} |\bar{\delta}| + o_P \left(n^{\frac{1}{2}} \bar{\delta} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (3.4.81)$$

Analog erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \max_{k^* \leq k < n} |U_{k,j}| \\ &= \max_{k^* \leq k < n} \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \left(\frac{n-k}{n} \sum_{i=k^*+1}^k (H_i \delta_1 + (I_\ell - Q_i) \delta_2) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{k}{n} \sum_{i=k+1}^n (H_i \delta_1 + (I_\ell - Q_i) \delta_2) \right)^{(j)} \right| + \mathcal{O}_P \left((\log \log n)^{\frac{1}{2}} \right) \\ & \stackrel{(3.4.76)-(3.4.78)}{=} (\tau(1-\tau))^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} |\bar{\delta}| + o_P \left(n^{\frac{1}{2}} \bar{\delta} \right) \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (3.4.82)$$

und für $\varepsilon > 0$:

$$\max_{1 \leq k \leq k^* - n\varepsilon} |U_{k,j}| < ((\tau - \varepsilon)(1 - \tau))^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} |\bar{\delta}| + o_P \left(n^{\frac{1}{2}} \bar{\delta} \right) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.4.83)$$

$$\max_{k^* + n\varepsilon \leq k < n} |U_{k,j}| < (\tau(1 - \tau - \varepsilon))^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} |\bar{\delta}| + o_P \left(n^{\frac{1}{2}} \bar{\delta} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.4.84)$$

Sei für $1 \leq k < n$, $0 < \alpha < \tau < \beta < 1$:

$$\begin{aligned} V_{k,j} &= V_{k,j}(n) := (U_{k,j})^2 - (U_{k^*,j})^2, \\ \tilde{k}_j &= \tilde{k}_j(n) := \inf \left\{ k \mid n\alpha \leq k \leq n\beta: V_{k,j} = \max_{n\alpha \leq i \leq n\beta} V_{i,j} \right\}. \end{aligned}$$

Aus (3.4.81)-(3.4.84) folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\hat{k}_j = \tilde{k}_j \right) = 1. \quad (3.4.85)$$

Mit Theorem 3.11 erhalten wir:

Es gibt eine Folge $\{Z_i^{(j)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ von unabhängig normalverteilten zentrierten Zufallsvariablen mit Varianz $\sigma^2 a_{j,j} + \tau^2 b_{j,j}$, wobei A, B aus Theorem 3.11, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq \ell}$ sowie $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq \ell}$, und es gibt ein $\lambda > 0$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} & \max_{n\alpha \leq k \leq n-n\beta} \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left| U_{k,j} - \left(\sum_{i=k^*+1}^k H_i \delta_1 + (I_\ell - Q_i) \delta_2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{k}{n} \sum_{i=k^*+1}^n (H_i \delta_1 + (I_\ell - Q_i) \delta_2) \right)^{(j)} \right. \\ & \quad \left. - \left(\sum_{i=1}^k Z_i^{(j)} - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^{(j)} \right) \right| \\ & = o_P \left((\log n)^{-\lambda} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (3.4.86)$$

Mit (3.4.77) folgt aus (3.4.86) für $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} & \max_{n\alpha \leq k \leq n-n\beta} \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \left(\frac{k(n-k)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} U_{k,j} - \left((k-k^*)_+ \bar{\delta} - \frac{k}{n} (n-k^*) \bar{\delta} \right) \right. \\ & \quad \left. - \left(\sum_{i=1}^k Z_i^{(j)} - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^{(j)} \right) \right| = o_P(1). \end{aligned} \quad (3.4.87)$$

Sei für $1 \leq k < n$:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{k,j} &= \tilde{U}_{k,j}(n) \\ &:= \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{i=1}^k Z_i^{(j)} - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^{(j)} + \left((k-k^*)_+ \bar{\delta} - \frac{k}{n} (n-k^*) \bar{\delta} \right) \right|, \\ \tilde{V}_{k,j} &= \tilde{V}_{k,j}(n) := \left(\tilde{U}_{k,j} \right)^2 - \left(\tilde{U}_{k^*,j} \right)^2. \end{aligned}$$

Mit (3.4.87) folgt:

$$\max_{n\alpha \leq k \leq n-n\beta} \left| U_{k,j} - \tilde{U}_{k,j} \right| = o_P(1). \quad (3.4.88)$$

Im Beweis von Theorem 2.8.1 in [CsHo97] wird gezeigt, dass gilt:

$$\limsup_{C \rightarrow \infty} \max_{n\alpha \leq k \leq k^* - \frac{C}{\delta_1^2}} \tilde{V}_{k,j} = -\infty + o_P(1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Wegen (3.4.88) folgt damit:

$$\limsup_{C \rightarrow \infty} \max_{n\alpha \leq k \leq k^* - \frac{C}{\delta_1^2}} V_{k,j} = -\infty + o_P(1) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.4.89)$$

Analog gilt:

$$\limsup_{C \rightarrow \infty} \max_{k^* + \frac{C}{\delta_2^2} \leq k \leq n\beta} V_{k,j} = -\infty + o_P(1) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.4.90)$$

Aus (3.4.89) und (3.4.90) folgt mit (3.4.85) (3.4.79). \square

Wir betrachten nun einen Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints, der alle Komponenten einbezieht.

$$\begin{aligned}\hat{k} &:= \inf \left\{ k \left| \max_{1 \leq j \leq \ell} \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{i=1}^k \Delta_i^{(j)} - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i^{(j)} \right| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. = \max_{1 \leq k < n} \max_{1 \leq j \leq \ell} \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{i=1}^k \Delta_i^{(j)} - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i^{(j)} \right| \right\}.\end{aligned}$$

Analog zu Theorem 3.14 erhalten wir das folgende Theorem.

Theorem 3.15. *Es sei das durch (3.4.1)-(3.4.15) definierte State-Space Modell unter $H_A^{(3)}$ gegeben. Es gelten (3.4.33) und:*

$$k^* = [n\tau] \quad \text{für ein } 0 < \tau < 1, \quad (3.4.91)$$

$\exists \bar{\delta} = \bar{\delta}(n) \in \mathbb{R}^\ell$, $\|\bar{\delta}\| \neq 0$, so dass für $n \rightarrow \infty$ gilt:

$$\max_{k^* < i < n} \|(H_i \delta_1 + (I_\ell - Q_i) \delta_2) - \bar{\delta}\| = o_P\left(n^{-\frac{1}{2}}\right), \quad (3.4.92)$$

$$\|\bar{\delta}\| \rightarrow 0, \quad \left(\frac{n}{\log \log n} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{\delta}\| \rightarrow \infty. \quad (3.4.93)$$

Dann folgt:

$$\left| \hat{k} - k^* \right| = \mathcal{O}_P \left(\frac{1}{\|\bar{\delta}\|^2} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.4.94)$$

Beweis: Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Theorem 3.14.

Sei für $1 \leq k < n$, $1 \leq j \leq \ell$, $0 < \alpha < \tau < \beta < 1$:

$$U_{k,j} = U_{k,j}(n) := \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^k \Delta_i^{(j)} - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i^{(j)} \right)$$

$$V_{k,j} = V_{k,j}(n) := (U_{k,j})^2 - (U_{k^*,j})^2,$$

$$\tilde{k} = \tilde{k}(n) := \inf \left\{ k \left| n\alpha \leq k \leq n\beta: \max_{1 \leq j \leq \ell} V_{k,j} = \max_{n\alpha \leq i \leq n\beta} \max_{1 \leq j \leq \ell} V_{i,j} \right. \right\}.$$

Dann folgt (vgl. Beweis von Theorem 3.14):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\hat{k} = \tilde{k}) = 1. \quad (3.4.95)$$

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

Mit Theorem 3.11 erhalten wir:

Es gibt eine Folge $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ von unabhängig normalverteilten zentrierten Zufallsvektoren mit $\text{Cov } Z_1 = \sigma^2 A + \tau^2 B$, und es gibt ein $\lambda > 0$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} & \max_{n\alpha \leq k \leq n-n\beta} \max_{1 \leq j \leq \ell} \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \left(\frac{k(n-k)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} U_{k,j} - \left(\sum_{i=k^*+1}^k H_i \delta_1 + (I_\ell - Q_i) \delta_2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{k}{n} \sum_{i=k^*+1}^n (H_i \delta_1 + (I_\ell - Q_i) \delta_2) \right)^{(j)} \right. \\ & \quad \left. - \left(\sum_{i=1}^k Z_i^{(j)} - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^{(j)} \right) \right| \\ &= o_P \left((\log n)^{-\lambda} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (3.4.96)$$

Sei für $1 \leq k < n$:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{k,j} &:= \left(\frac{n}{k(n-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{i=1}^k Z_i^{(j)} - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^{(j)} + (k - k^*)_+ \bar{\delta}^{(j)} - \frac{k}{n} (n - k^*) \bar{\delta}^{(j)} \right|, \\ \tilde{V}_{k,j} &:= \left(\tilde{U}_{k,j} \right)^2 - \left(\tilde{U}_{k^*,j} \right)^2. \end{aligned}$$

Mit (3.4.92) folgt aus (3.4.96):

$$\max_{n\alpha \leq k \leq n-n\beta} \max_{1 \leq j \leq \ell} \left| U_{k,j} - \tilde{U}_{k,j} \right| = o_P(1) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.4.97)$$

Im Beweis von Theorem 2.8.1 in [CsHo97] wird gezeigt, dass gilt:

$$\limsup_{C \rightarrow \infty} \max_{n\alpha \leq k \leq k^* - \frac{C}{\bar{\delta}(j)^2}} \tilde{V}_{k,j} = -\infty + o_P(1) \quad (n \rightarrow \infty) \quad \forall 1 \leq j \leq \ell.$$

Wegen (3.4.97) folgt damit:

$$\limsup_{C \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq \ell} \max_{n\alpha \leq k \leq k^* - \frac{C}{\bar{\delta}(j)^2}} V_{k,j} = -\infty + o_P(1) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.4.98)$$

Analog gilt:

$$\limsup_{C \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq \ell} \max_{k^* + \frac{C}{\bar{\delta}(j)^2} \leq k \leq n\beta} V_{k,j} = -\infty + o_P(1) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.4.99)$$

Aus (3.4.98) und (3.4.99) folgt mit (3.4.95) (3.4.94). \square

3.4.8 Varianzschätzer

Zack und Wang stellen in [Zac99] Schätzer für die Varianz der Fehlerprozesse in State-Space Modellen vor. Es wird das durch (3.4.1)-(3.4.11), (3.4.14), (3.4.15) definierte State-Space Modell betrachtet, wobei $H_i = H$ sowie $G_i = G$ gilt, mit H, G deterministisch. Auch wird kein Changepoint-Modell betrachtet, so dass nur der Fall der Nullhypothese untersucht wird. Ausgehend von den in [Zac99] definierten Schätzern entwickeln wir hier Varianzschätzer, die die Varianzen σ^2 bzw. τ^2 asymptotisch besser approximieren als in den Bedingungen (3.4.63), (3.4.64) für die Nullhypothese bzw. (3.4.73), (3.4.74) für den Fall einer der Alternativen gefordert wird. Die in [Zac99] verwendete Voraussetzung der Existenz der vierten Momente der Fehlerprozesse $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ bzw. $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ verallgemeinern wir zur Existenz der Momente der Ordnung $2 + \delta$ ($0 < \delta \leq 2$).

3.4.8.1 Varianzschätzer unter der Nullhypothese

$$\begin{aligned} \text{Sei } \hat{\sigma}_n^2 &:= -\frac{1}{n-2} \sum_{i=3}^n \frac{\Delta_i' Q_i \Delta_{i-1}}{\text{Sp}(Q_i' Q_i)}, \\ \hat{\tau}_n^2 &:= \hat{\zeta}_n^2 - \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n \frac{\ell + \text{Sp}(Q_i' Q_i)}{\text{Sp}(H_i' H_i)} \hat{\sigma}_n^2, \\ \text{wobei } \hat{\zeta}_n^2 &:= \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n \frac{\Delta_i' \Delta_i}{\text{Sp}(H_i' H_i)}. \end{aligned}$$

Die Bezeichnungen der eben definierten Schätzer seien nur für Abschnitt 3.4.8.1 gültig.

Theorem 3.16. *Es gelte H_0 , (3.4.1)-(3.4.11) sowie (3.4.14), (3.4.15). Dann sind $\hat{\sigma}_n^2$, $\hat{\tau}_n^2$ konsistente, erwartungstreue Schätzer für σ^2 bzw. τ^2 . Genauer gilt:*

$$|\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2| = \mathcal{O}_P\left(n^{-\frac{\delta}{2+\delta}}\right) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.4.100)$$

$$|\hat{\tau}_n^2 - \tau^2| = \mathcal{O}_P\left(n^{-\frac{\delta}{2+\delta}}\right) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.4.101)$$

Beweis: Alle asymptotischen Aussagen im Beweis zu Theorem 3.16 gelten für $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \frac{\Delta_i' Q_i \Delta_{i-1}}{\text{Sp}(Q_i' Q_i)} &\stackrel{(3.4.5), (3.4.21), \{\omega_i\}_{1 \leq i \leq n} \text{ zentr.}}{=} \mathbb{E} \frac{\tilde{\Delta}_i' Q_i \tilde{\Delta}_{i-1}}{\text{Sp}(Q_i' Q_i)} \\ &= \mathbb{E} \frac{(\varepsilon_i - Q_i \varepsilon_{i-1})' Q_i (\varepsilon_{i-1} - Q_{i-1} \varepsilon_{i-2})}{\text{Sp}(Q_i' Q_i)} \\ &\stackrel{(3.4.5), \{\varepsilon_i\}_{1 \leq i \leq n} \text{ zentr.}}{=} -\mathbb{E} \frac{\varepsilon_{i-1}' Q_i' Q_i \varepsilon_{i-1}}{\text{Sp}(Q_i' Q_i)} \\ &\stackrel{(3.4.14)}{=} -\sigma^2 \quad (3 \leq i \leq n). \end{aligned} \quad (3.4.102)$$

Damit haben wir die Erwartungstreue von $\hat{\sigma}_n^2$ nachgewiesen.

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left| \hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2 \right|^{\frac{2+\delta}{2}} \\
 = & \frac{1}{(n-2)^{\frac{2+\delta}{2}}} \mathbb{E} \left(\left| \sum_{i=3}^n -\frac{\Delta_i' Q_i \Delta_{i-1}}{\text{Sp}(Q_i' Q_i)} - \sigma^2 \right|^{\frac{2+\delta}{4}} \right)^2 \\
 \leq & \frac{1}{(n-2)^{\frac{2+\delta}{2}}} \mathbb{E} \left(\left(\sum_{i=3}^n \left| -\frac{\Delta_i' Q_i \Delta_{i-1}}{\text{Sp}(Q_i' Q_i)} - \sigma^2 \right| \right)^{\frac{2+\delta}{4}} \right)^2 \\
 \stackrel{\delta \leq 2}{\leq} & \frac{1}{(n-2)^{\frac{2+\delta}{2}}} \mathbb{E} \left(\sum_{i=3}^n \left| -\frac{\Delta_i' Q_i \Delta_{i-1}}{\text{Sp}(Q_i' Q_i)} - \sigma^2 \right|^{\frac{2+\delta}{4}} \right)^2 \\
 \stackrel{(3.4.10), (3.4.102)}{\leq} & \frac{1}{(\text{const}_{21}(n-2))^{\frac{2+\delta}{2}}} \mathbb{E} \left(\sum_{i=3}^n (\Delta_i' Q_i \Delta_{i-1} - \mathbb{E} \Delta_i' Q_i \Delta_{i-1})^{\frac{2+\delta}{4}} \right)^2 \\
 \stackrel{(3.4.5), (3.4.6)}{=} & \frac{1}{(\text{const}_{21}(n-2))^{\frac{2+\delta}{2}}} \left[\sum_{i=3}^n \text{Var} (\Delta_i' Q_i \Delta_{i-1})^{\frac{2+\delta}{4}} \right. \\
 & + 2 \sum_{i=4}^n \text{Cov} \left((\Delta_i' Q_i \Delta_{i-1})^{\frac{2+\delta}{4}}, (\Delta_{i-1}' Q_{i-1} \Delta_{i-2})^{\frac{2+\delta}{4}} \right) \\
 & \left. + 2 \sum_{i=5}^n \text{Cov} \left((\Delta_i' Q_i \Delta_{i-1})^{\frac{2+\delta}{4}}, (\Delta_{i-2}' Q_{i-2} \Delta_{i-3})^{\frac{2+\delta}{4}} \right) \right] \\
 \stackrel{(3.4.6), (3.4.8), (3.4.9)}{=} & \mathcal{O} \left(n^{-\frac{\delta}{2}} \right). \tag{3.4.103}
 \end{aligned}$$

Mit Lemma 7.8 ergibt sich hieraus (3.4.100).

Aus (3.4.21) folgt mit (3.4.5), (3.4.14), (3.4.15), $\{\omega_i\}_{1 \leq i \leq n}$, $\{\varepsilon_i\}_{1 \leq i \leq n}$ zentriert:

$$\mathbb{E} \Delta_i = 0, \quad \mathbb{E} (\Delta_i' \Delta_i) = \mathbb{E} (\tau^2 \text{Sp}(H_i' H_i) + \sigma^2 (\ell + \text{Sp}(Q_i' Q_i))) \quad (2 \leq i \leq n).$$

Damit erhalten wir:

$$\mathbb{E} \hat{\zeta}_n^2 = \tau^2 + \sigma^2 \mathbb{E} \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n \frac{\ell + \text{Sp}(Q_i' Q_i)}{\text{Sp}(H_i' H_i)} \right).$$

Hieraus ergibt sich mit der Erwartungstreue von $\hat{\sigma}_n^2$ die Erwartungstreue von $\hat{\tau}_n^2$.

Analog zu (3.4.100) zeigt man:

$$\left| \hat{\zeta}_n^2 - \left(\tau^2 + \sigma^2 \mathbb{E} \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n \frac{\ell + \text{Sp}(Q_i' Q_i)}{\text{Sp}(H_i' H_i)} \right) \right) \right| = \mathcal{O}_P \left(n^{-\frac{\delta}{2+\delta}} \right), \tag{3.4.104}$$

$$\left| \hat{\sigma}_n^2 \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n \frac{\ell + \text{Sp}(Q_i' Q_i)}{\text{Sp}(H_i' H_i)} \right) - \sigma^2 \mathbb{E} \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n \frac{\ell + \text{Sp}(Q_i' Q_i)}{\text{Sp}(H_i' H_i)} \right) \right| = \mathcal{O}_P \left(n^{-\frac{\delta}{2+\delta}} \right). \tag{3.4.105}$$

Aus (3.4.104), (3.4.105) erhalten wir (3.4.101). \square

Bemerkung 3.43. In (3.4.6) wird $0 < \delta \leq 1$ vorausgesetzt. Die Aussagen aus Abschnitt 3.4.8.1 gelten allgemeiner für $0 < \delta \leq 2$.

3.4.8.2 Varianzschätzer im 1. Changepoint-Modell

In Abschnitt 3.4.8.2 verwenden wir folgende Regularitätsbedingungen:

$$\begin{aligned} &\exists \bar{A}_1 \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}, \text{ positiv definit, so dass für } n \rightarrow \infty \text{ gilt:} \\ &\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H'_i H_i H'_i H_i - \bar{A}_1 \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o(1), \end{aligned} \quad (3.4.106)$$

$$\begin{aligned} &\exists \bar{A}_2 \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}, \text{ positiv definit, so dass für } n \rightarrow \infty \text{ gilt:} \\ &\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (H'_i - H_{i+1} Q_{i+1}) (H'_i - H_{i+1} Q_{i+1})' - \bar{A}_2 \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o(1), \end{aligned} \quad (3.4.107)$$

$$\begin{aligned} &\exists \bar{B} \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}, \text{ positiv definit, so dass für } n \rightarrow \infty \text{ gilt:} \\ &\left\| \frac{1}{n - \hat{k}} \sum_{i=\hat{k}+1}^n H'_i H_i - \bar{B} \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o(1), \end{aligned} \quad (3.4.108)$$

$$\sum_{i=\hat{k}+1}^n H'_i H_i \quad P\text{-f.s. invertierbar}, \quad (3.4.109)$$

$$\sum_{i=\hat{k}+1}^n \tilde{H}'_i \tilde{H}_i \quad \text{invertierbar}, \quad (3.4.110)$$

wobei $\hat{k} = \hat{k}(n)$ ($1 \leq \hat{k} < n$) ein Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints k^* sei und $\tilde{H}_i = E H_i$ (vgl. Abschnitt 3.4.1).

Bemerkung 3.44. Aus (3.4.108), (3.4.109) bzw. (3.4.110) folgt mit Lemma 7.6:

$$\begin{aligned} &\left\| (n - \hat{k}) \left(\sum_{i=\hat{k}+1}^n H'_i H_i \right)^{-1} - \bar{B}^{-1} \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o(1) \quad (n \rightarrow \infty), \\ &\left\| (n - \hat{k}) \left(\sum_{i=\hat{k}+1}^n \tilde{H}'_i \tilde{H}_i \right)^{-1} - \bar{B}^{-1} \right\| = o(1) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Für den Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints \hat{k} gelte unter $H_A^{(1)}$:

$$\frac{\hat{k} - k^*}{n} = o_P(1) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.4.111)$$

Als Schätzer für die Sprunghöhe δ_1 wählen wir:

$$\hat{\delta}_1 = \hat{\delta}_1(n) := \left(\sum_{i=\hat{k}+1}^n H'_i H_i \right)^{-1} \sum_{i=\hat{k}+1}^n H'_i \Delta_i.$$

Wir definieren folgende Schätzer für σ^2, τ^2 :

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_n^2 &:= -\frac{1}{n-2} \left(\sum_{i=3}^n \frac{\Delta_i' Q_i \Delta_{i-1}}{\text{Sp}(Q_i' Q_i)} - \sum_{i=\hat{k}+2}^n \frac{\hat{\delta}_1' H_i' Q_i H_{i-1} \hat{\delta}_1}{\text{Sp}(Q_i' Q_i)} \right), \\ \hat{\tau}_n^2 &:= \hat{\zeta}_n^2 - \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n \frac{\ell + \text{Sp}(Q_i' Q_i)}{\text{Sp}(H_i' H_i)} \hat{\sigma}_n^2, \\ \text{wobei } \hat{\zeta}_n^2 &:= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=2}^{\hat{k}} \frac{\Delta_i' \Delta_i}{\text{Sp}(H_i' H_i)} + \sum_{i=\hat{k}+1}^n \frac{(\Delta_i - H_i \hat{\delta}_1)' (\Delta_i - H_i \hat{\delta}_1)}{\text{Sp}(H_i' H_i)} \right).\end{aligned}$$

Die Bezeichnungen der eben definierten Schätzer seien nur für Abschnitt 3.4.8.2 gültig.

Bemerkung 3.45. *Die oben definierten Schätzer sind P-f.s. definiert.*

Wir betrachten das Verhalten der Varianzschätzer für den Fall der Nullhypothese.

Theorem 3.17. *Es gelte H_0 , (3.4.1)-(3.4.11), (3.4.14), (3.4.15), (3.4.106)-(3.4.109), σ^2, τ^2 nicht beide 0. Dann sind $\hat{\sigma}_n^2, \hat{\tau}_n^2$ konsistente, asymptotisch erwartungstreue Schätzer für σ^2 bzw. τ^2 . Genauer gilt für $n \rightarrow \infty$:*

$$|\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2| = \mathcal{O}_P \left(n^{-\frac{\delta}{2+\delta}} \right), \quad (3.4.112)$$

$$|\hat{\tau}_n^2 - \tau^2| = \mathcal{O}_P \left(n^{-\frac{\delta}{2+\delta}} \right), \quad (3.4.113)$$

$$\mathbb{E} \hat{\sigma}_n^2 = \sigma^2 + o \left(\frac{(\log \log n)^q}{n} \right) \quad \forall q > 1, \quad (3.4.114)$$

$$\mathbb{E} \hat{\tau}_n^2 = \tau^2 + o \left(\frac{(\log \log n)^q}{n} \right) \quad \forall q > 1. \quad (3.4.115)$$

Beweis: Alle asymptotischen Aussagen im Beweis zu Theorem 3.17 gelten für $n \rightarrow \infty$.

Analog zum Beweis von Theorem 3.16 erhalten wir:

$$\mathbb{E} \frac{\Delta_i' Q_i \Delta_{i-1}}{\text{Sp}(Q_i' Q_i)} = -\sigma^2 \quad (3 \leq i \leq n). \quad (3.4.116)$$

Wie im Beweis zu Theorem 3.16 gilt für $2 \leq i \leq n$:

$$\mathbb{E} \Delta_i = 0, \quad \mathbb{E} (\Delta_i' \Delta_i) = \mathbb{E} \left(\tau^2 \text{Sp}(H_i' H_i) + \sigma^2 (\ell + \text{Sp}(Q_i' Q_i)) \right). \quad (3.4.117)$$

Mit Lemma 7.7 und Lemma 7.8 folgt aus (3.4.117) mit (3.4.8), (3.4.9):

$$\max_{2 \leq i \leq n} \Delta_i' \Delta_i = \mathcal{O}_P(1), \quad \max_{2 \leq i \leq n} \Delta_i = \mathcal{O}_P(1). \quad (3.4.118)$$

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

Analog zum Beweis von Theorem 3.11 weist man unter Ausnutzung der Bedingungen (3.4.106), (3.4.107) das folgende Invarianzprinzip nach:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Folge i.i.d. normalverteilter zentrierter ℓ -dimensionaler Zufallsvektoren $\{Z_i^{(n)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\text{Cov } Z_1^{(n)} = \sigma^2 \bar{A}_1 + \tau^2 \bar{A}_2$, so dass für ein $\lambda > 0$ gilt:

$$\max_{1 \leq k < n-1} \frac{\left\| \sum_{i=k+1}^n H_i' \Delta_i - \sum_{i=k+1}^n Z_i^{(n)} \right\|}{(n-k)^{\frac{1}{2}} (\log(n-k))^{-\lambda}} \stackrel{P-f.s.}{=} o(1) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.4.119)$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} & (n - \hat{k}) \hat{\delta}_1' \hat{\delta}_1 \\ = & (n - \hat{k}) \left(\left(\sum_{i=\hat{k}+1}^n H_i' H_i \right)^{-1} \sum_{i=\hat{k}+1}^n H_i' \Delta_i \right)' \\ & \left(\left(\sum_{i=\hat{k}+1}^n H_i' H_i \right)^{-1} \sum_{i=\hat{k}+1}^n H_i' \Delta_i \right) \\ \stackrel{\text{Bem. 3.44 } P-f.s.}{=} & \mathcal{O} \left((n - \hat{k})^{-1} \left(\sum_{i=\hat{k}+1}^n H_i' \Delta_i \right)' \left(\sum_{i=\hat{k}+1}^n H_i' \Delta_i \right) \right) \\ \stackrel{(3.4.119) P-f.s.}{=} & \mathcal{O} \left(\max_{1 \leq k \leq n} (n - k)^{-1} \left(\sum_{i=k+1}^n Z_i^{(n)} \right)' \left(\sum_{i=k+1}^n Z_i^{(n)} \right) \right) + o(1) \\ \stackrel{\text{Iter.Log.}}{=} & \mathcal{O}_P(\log \log n). \end{aligned} \quad (3.4.120)$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\frac{1}{n-2} \sum_{i=\hat{k}+2}^n \frac{\hat{\delta}_1' H_i' Q_i H_{i-1} \hat{\delta}_1}{\text{Sp}(Q_i' Q_i)} \right) \\ \stackrel{(3.4.8)-(3.4.10)}{=} & \mathcal{O} \left(\mathbb{E} \left(\frac{1}{n-2} (n - \hat{k}) \hat{\delta}_1' \hat{\delta}_1 \right) \right) \\ \stackrel{(3.4.120)}{=} & o \left(\frac{(\log \log n)^q}{n} \right) \quad \forall q > 1. \end{aligned} \quad (3.4.121)$$

Aus (3.4.116), (3.4.121) folgt die asymptotische Erwartungstreue von $\hat{\sigma}_n^2$, d.h. (3.4.114).

$$\sum_{i=\hat{k}+1}^n \Delta_i' H_i \hat{\delta}_1 \stackrel{(3.4.8), (3.4.118)-(3.4.120), \text{Iter.Log.}}{=} \mathcal{O}_P(\log \log n). \quad (3.4.122)$$

Mit (3.4.8), (3.4.11), (3.4.120), (3.4.122) erhalten wir:

$$\sum_{i=\hat{k}+1}^n \frac{(\Delta_i - H_i \hat{\delta}_1)' (\Delta_i - H_i \hat{\delta}_1)}{\text{Sp}(H_i' H_i)} = \sum_{i=\hat{k}+1}^n \frac{\Delta_i' \Delta_i}{\text{Sp}(H_i' H_i)} + \mathcal{O}_P(\log \log n). \quad (3.4.123)$$

Mit (3.4.117), (3.4.123) folgt:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \hat{\zeta}_n^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \mathbb{E} \left(\sum_{i=2}^n \frac{\tau^2 \text{Sp}(H_i' H_i) + \sigma^2 (\ell + \text{Sp}(Q_i' Q_i))}{\text{Sp}(H_i' H_i)} \right) + o \left(\frac{(\log \log n)^q}{n} \right) \\ &= \tau^2 + \sigma^2 \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n \mathbb{E} \left(\frac{\ell + \text{Sp}(Q_i' Q_i)}{\text{Sp}(H_i' H_i)} \right) + o \left(\frac{(\log \log n)^q}{n} \right) \quad \forall q > 1. \end{aligned} \quad (3.4.124)$$

Unter Ausnutzung der asymptotischen Erwartungstreue von $\hat{\sigma}_n$ folgt aus (3.4.124) (3.4.115), d.h. die asymptotische Erwartungstreue von $\hat{\tau}_n$.

$$\begin{aligned} \text{Sei} \quad \tilde{\sigma}_n^2 &:= -\frac{1}{n-2} \sum_{i=3}^n \frac{\Delta_i' Q_i \Delta_{i-1}}{\text{Sp}(Q_i' Q_i)}, \\ \tilde{\zeta}_n^2 &:= \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n \frac{\Delta_i' \Delta_i}{\text{Sp}(H_i' H_i)}, \\ \tilde{\tau}_n^2 &:= \tilde{\zeta}_n^2 - \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n \frac{\ell + \text{Sp}(Q_i' Q_i)}{\text{Sp}(H_i' H_i)} \tilde{\sigma}_n^2. \end{aligned}$$

$\tilde{\sigma}_n^2$, $\tilde{\zeta}_n^2$ bzw. $\tilde{\tau}_n^2$ entsprechen $\hat{\sigma}_n^2$, $\hat{\zeta}_n^2$, bzw. $\hat{\tau}_n^2$ aus Abschnitt 3.4.8.1.

Analog wie im Beweis zu Theorem 3.16 erhalten wir:

$$|\tilde{\sigma}_n^2 - \sigma^2| = \mathcal{O}_P \left(n^{-\frac{\delta}{2+\delta}} \right), \quad (3.4.125)$$

$$|\tilde{\tau}_n^2 - \tau^2| = \mathcal{O}_P \left(n^{-\frac{\delta}{2+\delta}} \right). \quad (3.4.126)$$

Wir schätzen nun den Fehler ab, der beim Übergang von $\tilde{\sigma}_n^2$ zu $\hat{\sigma}_n^2$ entsteht.

$$|\tilde{\sigma}_n^2 - \hat{\sigma}_n^2| \stackrel{(3.4.8)-(3.4.10), (3.4.120)}{=} \mathcal{O}_P \left(\frac{\log \log n}{n} \right). \quad (3.4.127)$$

Aus (3.4.125) und (3.4.127) folgt (3.4.112).

$$\begin{aligned} & \left| \tilde{\zeta}_n^2 - \hat{\zeta}_n^2 \right| \\ &= \frac{1}{n-1} \left| \sum_{i=\hat{k}+1}^n \frac{(-\hat{\delta}_1' H_i' \Delta_i - \Delta_i' H_i \hat{\delta}_1 + \hat{\delta}_1' H_i' H_i \hat{\delta}_1)}{\text{Sp}(H_i' H_i)} \right| \\ & \stackrel{(3.4.8), (3.4.11), (3.4.120), (3.4.122)}{=} \mathcal{O}_P \left(\frac{\log \log n}{n} \right). \end{aligned} \quad (3.4.128)$$

$$|\hat{\tau}_n^2 - \tilde{\tau}_n^2| \stackrel{(3.4.9), (3.4.11), (3.4.127), (3.4.128)}{=} \mathcal{O}_P \left(\frac{n}{\log \log n} \right). \quad (3.4.129)$$

Aus (3.4.126) und (3.4.129) erhalten wir (3.4.113). \square

Das folgende Theorem beschreibt das asymptotische Verhalten der Varianzschätzer unter der Alternative $H_A^{(1)}$.

Theorem 3.18. *Es gelte $H_A^{(1)}$, (3.4.1)-(3.4.11), (3.4.14), (3.4.15), (3.4.106)-(3.4.111), σ^2, τ^2 nicht beide 0, $\delta_1 = \delta_1(n) = \mathcal{O}(1)$. Dann sind $\hat{\sigma}_n^2, \hat{\tau}_n^2$ konsistente Schätzer für σ^2 bzw. τ^2 . Genauer gilt für $n \rightarrow \infty$:*

$$|\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2| = o_P(1), \quad (3.4.130)$$

$$|\hat{\tau}_n^2 - \tau^2| = o_P(1). \quad (3.4.131)$$

Beweis: Alle asymptotischen Aussagen im Beweis zu Theorem 3.17 gelten für $n \rightarrow \infty$.

Aus (3.4.21) folgt mit (3.4.5), (3.4.14), (3.4.15) für $2 \leq i \leq n$:

$$\mathbb{E} \Delta_i = \mathbb{E} H_i \omega_i = \tilde{H}_i \delta_1 \mathbb{1}_{\{i \geq k^*+1\}}, \quad (3.4.132)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Delta'_i \Delta_i) &= \mathbb{E}(\tau^2 \text{Sp}(H'_i H_i) + \sigma^2(\ell + \text{Sp}(Q'_i Q_i)) \\ &\quad + \mathbb{1}_{\{i \geq k^*+1\}} \delta'_1 \mathbb{E} H'_i \mathbb{E} H_i \delta_1). \end{aligned} \quad (3.4.133)$$

Mit Lemma 7.7 und Lemma 7.8 folgt aus (3.4.133) mit (3.4.8), (3.4.9):

$$\max_{2 \leq i \leq n} \Delta'_i \Delta_i = \mathcal{O}_P(1), \quad \max_{2 \leq i \leq n} \Delta_i = \mathcal{O}_P(1). \quad (3.4.134)$$

Analog zum Beweis von Theorem 3.11 (vgl. (3.4.119)) weist man unter Ausnutzung der Bedingungen (3.4.106), (3.4.107) das folgende Invarianzprinzip nach:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Folge i.i.d. normalverteilter zentrierter ℓ -dimensionaler Zufallsvektoren $\{Z_i^{(n)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\text{Cov } Z_1^{(n)} = \sigma^2 \bar{A}_1 + \tau^2 \bar{A}_2$, so dass für ein $\lambda > 0$ gilt:

$$\max_{1 \leq k < n-1} \frac{\left\| \sum_{i=k+1}^n (H'_i \Delta_i - \mathbb{E} H'_i \Delta_i) - \sum_{i=k+1}^n Z_i^{(n)} \right\|}{(n-k)^{\frac{1}{2}} (\log(n-k))^{-\lambda}} \stackrel{P-f.s.}{=} o(1) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.4.135)$$

Analog zu (3.4.120) erhalten wir damit:

$$\begin{aligned}
 & \frac{(n - \hat{k}) (\hat{\delta}_1 - \delta_1)' (\hat{\delta}_1 - \delta_1)}{(n - \hat{k})} \\
 &= \frac{\left(\left(\sum_{i=\hat{k}+1}^n H_i' H_i \right)^{-1} \sum_{i=\hat{k}+1}^n H_i' \Delta_i - \left(\sum_{i=\hat{k}+1}^n \tilde{H}_i' \tilde{H}_i \right)^{-1} \tilde{H}_i' \tilde{H}_i \delta_1 \right)'}{\left(\left(\sum_{i=\hat{k}+1}^n H_i' H_i \right)^{-1} \sum_{i=\hat{k}+1}^n H_i' \Delta_i - \left(\sum_{i=\hat{k}+1}^n \tilde{H}_i' \tilde{H}_i \right)^{-1} \tilde{H}_i' \tilde{H}_i \delta_1 \right)} \\
 &\stackrel{(3.4.132), \text{Bem. 3.44 } P\text{-f.s.}}{=} \mathcal{O} \left((n - \hat{k})^{-1} \left(\sum_{i=\hat{k}+1}^n (H_i' \Delta_i - \mathbb{E} H_i' \Delta_i) \right)' \right. \\
 &\quad \left. \left(\sum_{i=\hat{k}+1}^n (H_i' \Delta_i - \mathbb{E} H_i' \Delta_i) \right) \right) \\
 &\stackrel{(3.4.135) \text{ } P\text{-f.s.}}{=} \mathcal{O} \left(\max_{1 \leq k \leq n} (n - k)^{-1} \left(\sum_{i=k+1}^n Z_i^{(n)} \right)' \left(\sum_{i=k+1}^n Z_i^{(n)} \right) \right) + o(1) \\
 &\stackrel{\text{Iter.Log.}}{=} \mathcal{O}_P(\log \log n). \tag{3.4.136}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Sei } \tilde{\sigma}_n^2 &:= -\frac{1}{n-2} \left(\sum_{i=3}^n \frac{\Delta_i' Q_i \Delta_{i-1}}{\text{Sp}(Q_i' Q_i)} - \sum_{i=k^*+2}^n \frac{\delta_1' H_i' Q_i H_{i-1} \delta_1}{\text{Sp}(Q_i' Q_i)} \right), \\
 \tilde{\zeta}_n^2 &:= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=2}^{k^*} \frac{\Delta_i' \Delta_i}{\text{Sp}(H_i' H_i)} + \sum_{i=k^*+1}^n \frac{(\Delta_i - H_i \delta_1)' (\Delta_i - H_i \delta_1)}{\text{Sp}(H_i' H_i)} \right), \\
 \tilde{\tau}_n^2 &:= \tilde{\zeta}_n^2 - \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n \frac{\ell + \text{Sp}(Q_i' Q_i)}{\text{Sp}(H_i' H_i)} \tilde{\sigma}_n^2.
 \end{aligned}$$

Analog wie im Beweis zu Theorem 3.16 erhalten wir:

$$|\tilde{\sigma}_n^2 - \sigma^2| = \mathcal{O}_P \left(n^{-\frac{\delta}{2+\delta}} \right), \tag{3.4.137}$$

$$|\tilde{\tau}_n^2 - \tau^2| = \mathcal{O}_P \left(n^{-\frac{\delta}{2+\delta}} \right). \tag{3.4.138}$$

Wir schätzen nun den Fehler ab, der beim Übergang von $\tilde{\sigma}_n^2$ zu $\hat{\sigma}_n^2$ entsteht.

$$\begin{aligned}
 & \left| \tilde{\sigma}_n^2 - \left(-\frac{1}{n-2} \left(\sum_{i=3}^n \frac{\Delta_i' Q_i \Delta_{i-1}}{\text{Sp}(Q_i' Q_i)} - \sum_{i=\hat{k}+2}^n \frac{\delta_1' H_i' Q_i H_{i-1} \delta_1}{\text{Sp}(Q_i' Q_i)} \right) \right) \right| \\
 & \leq \frac{|\hat{k} - k^*|}{n-2} \max_{i \in \mathbb{N}} \frac{\delta_1' H_i' Q_i H_{i-1} \delta_1}{\text{Sp}(Q_i' Q_i)} \\
 & \stackrel{(3.4.8)-(3.4.10), (3.4.111)}{=} o_P(1). \tag{3.4.139}
 \end{aligned}$$

Aus (3.4.136) folgt mit (3.4.8)-(3.4.10):

$$\begin{aligned}
 & \left| \hat{\sigma}_n^2 - \left(-\frac{1}{n-2} \left(\sum_{i=3}^n \frac{\Delta_i' Q_i \Delta_{i-1}}{\text{Sp}(Q_i' Q_i)} - \sum_{i=\hat{k}+2}^n \frac{\delta_1' H_i' Q_i H_{i-1} \delta_1}{\text{Sp}(Q_i' Q_i)} \right) \right) \right| \\
 & = o_P \left(\frac{\log \log n}{n} \right). \tag{3.4.140}
 \end{aligned}$$

Aus (3.4.139), (3.4.140) erhalten wir:

$$|\hat{\sigma}_n^2 - \tilde{\sigma}_n^2| = o_P(1). \tag{3.4.141}$$

Aus (3.4.137) und (3.4.141) folgt (3.4.130).

Wir schätzen den Fehler ab, der beim Übergang von $\tilde{\tau}_n^2$ zu $\hat{\tau}_n^2$ entsteht. Wir betrachten dazu zunächst den Fehler, der beim Übergang von $\tilde{\zeta}_n^2$ zu $\hat{\zeta}_n^2$ entsteht. Mit (3.4.8), (3.4.9), (3.4.11), (3.4.111), (3.4.134) folgt:

$$\begin{aligned}
 & \left| \tilde{\zeta}_n^2 - \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=2}^{\hat{k}} \frac{\Delta_i' \Delta_i}{\text{Sp}(H_i' H_i)} + \sum_{i=\hat{k}+1}^n \frac{(\Delta_i - H_i \delta_1)' (\Delta_i - H_i \delta_1)}{\text{Sp}(H_i' H_i)} \right) \right| \\
 & = \frac{1}{n-1} \left| - \sum_{i=k^*+1}^{\hat{k}} \frac{(-\delta_1' H_i' \Delta_i - \Delta_i' H_i \delta_1 + \delta_1' H_i' H_i \delta_1)}{\text{Sp}(H_i' H_i)} \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{i=\hat{k}+1}^{k^*} \frac{(-\delta_1' H_i' \Delta_i - \Delta_i' H_i \delta_1 + \delta_1' H_i' H_i \delta_1)}{\text{Sp}(H_i' H_i)} \right| \\
 & = \mathcal{O}_P(1) \frac{|\hat{k} - k^*|}{n} \\
 & = o_P(1). \tag{3.4.142}
 \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\sum_{i=\hat{k}+1}^n \Delta_i' H_i \left(\hat{\delta}_1 - \delta_1 \right) \stackrel{(3.4.8), (3.4.134)-(3.4.136), \text{Iter. Log.}}{=} \mathcal{O}_P(\log \log n). \tag{3.4.143}$$

Mit (3.4.8), (3.4.9), (3.4.11), (3.4.136), (3.4.143) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 & \left| \hat{\zeta}_n^2 - \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=2}^{\hat{k}} \frac{\Delta_i' \Delta_i}{\text{Sp}(H_i' H_i)} + \sum_{i=\hat{k}+1}^n \frac{(\Delta_i - H_i \delta_1)' (\Delta_i - H_i \delta_1)}{\text{Sp}(H_i' H_i)} \right) \right| \\
 & \leq \frac{1}{n-1} \left| \sum_{i=\hat{k}+1}^n \frac{(\hat{\delta}_1 - \delta_1)' H_i' H_i (\hat{\delta}_1 - \delta_1) - (\hat{\delta}_1 - \delta_1)' H_i' \Delta_i - \Delta_i' H_i (\hat{\delta}_1 - \delta_1)}{\text{Sp}(H_i' H_i)} \right| \\
 & = \mathcal{O}_P \left(\frac{\log \log n}{n} \right). \tag{3.4.144}
 \end{aligned}$$

Aus (3.4.142) und (3.4.144) folgt:

$$\left| \hat{\zeta}_n^2 - \tilde{\zeta}_n^2 \right| = o_P(1). \tag{3.4.145}$$

Mit (3.4.141) und (3.4.145) folgt:

$$\left| \hat{\tau}_n^2 - \tilde{\tau}_n^2 \right| \stackrel{(3.4.9), (3.4.11), (3.4.141), (3.4.145)}{=} o_P(1). \tag{3.4.146}$$

Aus (3.4.138) und (3.4.146) erhalten wir (3.4.131). \square

3.4.8.3 Varianzschätzer im 2. Changepoint-Modell

In Abschnitt 3.4.8.3 verwenden wir folgende Regularitätsvoraussetzungen:

$$\begin{aligned}
 & \exists \bar{A} \in \mathbb{R}^{p \times p}, \text{ positiv definit, so dass gilt:} \\
 & \left\| \frac{1}{n - \hat{k}} \sum_{i=\hat{k}+2}^n (I_\ell - Q_i) - \bar{A} \right\| \stackrel{P\text{-f.s.}}{=} o(1) \quad (n \rightarrow \infty), \tag{3.4.147}
 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=\hat{k}+2}^n (I_\ell - Q_i) \quad P\text{-f.s. invertierbar}, \tag{3.4.148}$$

wobei $\hat{k} = \hat{k}(n)$ ($1 \leq \hat{k} < n$) ein Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints k^* sei.

Bemerkung 3.46. Aus (3.4.147), (3.4.148) folgt mit Lemma 7.6 insbesondere:

$$\left\| \left(n - \hat{k} \right) \left(\sum_{i=\hat{k}+2}^n I_\ell - Q_i \right)^{-1} - \bar{A}^{-1} \right\| \stackrel{P\text{-f.s.}}{=} o(1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Für den Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints \hat{k} gelte unter $H_A^{(2)}$:

$$\frac{\hat{k} - k^*}{n} = o_P(1) \quad (n \rightarrow \infty). \tag{3.4.149}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Sei } \hat{\delta}_2 &= \hat{\delta}_2(n) := \left(\sum_{i=\hat{k}+2}^n I_\ell - Q_i \right)^{-1} \sum_{i=\hat{k}+1}^n \Delta_i, \\
 \hat{\sigma}_n^2 &:= -\frac{1}{n-2} \left(\sum_{i=3}^n \frac{\Delta'_i Q_i \Delta_{i-1}}{\text{Sp}(Q'_i Q_i)} - \frac{\hat{\delta}'_2 Q_{\hat{k}+2} \hat{\delta}_2}{\text{Sp}(Q'_{\hat{k}+2} Q_{\hat{k}+2})} + \frac{\hat{\delta}'_2 Q'_{\hat{k}+2} Q_{\hat{k}+2} \hat{\delta}_2}{\text{Sp}(Q'_{\hat{k}+2} Q_{\hat{k}+2})} \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{i=\hat{k}+3}^n \frac{\hat{\delta}'_2 Q_i \hat{\delta}_2 - \hat{\delta}'_2 Q_i Q_{i-1} \hat{\delta}_2 + \hat{\delta}'_2 Q'_i Q_i Q_{i-1} \hat{\delta}_2 - \hat{\delta}'_2 Q'_i Q_i \hat{\delta}_2}{\text{Sp}(Q'_i Q_i)} \right), \\
 \hat{\tau}_n^2 &= \hat{\zeta}_n^2 - \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n \frac{\ell + \text{Sp}(Q'_i Q_i)}{\text{Sp}(H'_i H_i)} \hat{\sigma}_n^2, \\
 \text{wobei } \hat{\zeta}_n^2 &:= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=2}^{\hat{k}} \frac{\Delta'_i \Delta_i}{\text{Sp}(H'_i H_i)} + \sum_{i=\hat{k}+2}^n \frac{(\Delta_i - (I_\ell - Q_i) \hat{\delta}_2)' (\Delta_i - (I_\ell - Q_i) \hat{\delta}_2)}{\text{Sp}(H'_i H_i)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(\Delta_{\hat{k}+1} - I_\ell \hat{\delta}_2)' (\Delta_{\hat{k}+1} - I_\ell \hat{\delta}_2)}{\text{Sp}(H'_{\hat{k}+1} H_{\hat{k}+1})} \right).
 \end{aligned}$$

Die Bezeichnungen für die eben definierten Schätzer seien dabei nur für Abschnitt 3.4.8.3 gültig.

Wir betrachten zunächst das Verhalten der Varianzschätzer unter H_0 .

Theorem 3.19. *Es gelte H_0 , (3.4.1)-(3.4.15), (3.4.147), (3.4.148), σ^2, τ^2 nicht beide 0. Dann sind $\hat{\sigma}_n^2, \hat{\tau}_n^2$ konsistente, asymptotisch erwartungstreue Schätzer für σ^2 bzw. τ^2 . Genauer gilt für $n \rightarrow \infty$:*

$$|\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2| = \mathcal{O}_P \left(n^{-\frac{\delta}{2+\delta}} \right), \quad (3.4.150)$$

$$|\hat{\tau}_n^2 - \tau^2| = \mathcal{O}_P \left(n^{-\frac{\delta}{2+\delta}} \right), \quad (3.4.151)$$

$$\mathbb{E} \hat{\sigma}_n^2 = \sigma^2 + o \left(\frac{(\log \log n)^q}{n} \right) \quad \forall q > 1, \quad (3.4.152)$$

$$\mathbb{E} \hat{\tau}_n^2 = \tau^2 + o \left(\frac{(\log \log n)^q}{n} \right) \quad \forall q > 1. \quad (3.4.153)$$

Beweis: Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Theorem 3.17.

Alle asymptotischen Aussagen im Beweis zu Theorem 3.19 gelten für $n \rightarrow \infty$.

Analog zum Beweis von Theorem 3.17 erhalten wir:

$$\mathbb{E} \frac{\Delta'_i Q_i \Delta_{i-1}}{\text{Sp}(Q'_i Q_i)} = -\sigma^2 \quad (3 \leq i \leq n), \quad (3.4.154)$$

$$\mathbb{E} \Delta_i = 0, \quad \mathbb{E}(\Delta'_i \Delta_i) = \mathbb{E} \left(\tau^2 \text{Sp}(H'_i H_i) + \sigma^2 (\ell + \text{Sp}(Q'_i Q_i)) \right) \quad (2 \leq i \leq n), \quad (3.4.155)$$

$$\max_{2 \leq i \leq n} \Delta'_i \Delta_i = \mathcal{O}_P(1), \quad \max_{2 \leq i \leq n} \Delta_i = \mathcal{O}_P(1). \quad (3.4.156)$$

Analog zum Nachweis von (3.4.120) im Beweis von Theorem 3.17 erhalten wir:

$$\begin{aligned} & (n - \hat{k}) \hat{\delta}'_2 \hat{\delta}_2 \\ = & (n - \hat{k}) \left(\left(\sum_{i=\hat{k}+2}^n I_\ell - Q_i \right)^{-1} \sum_{i=\hat{k}+1}^n \Delta_i \right)' \\ & \left(\left(\sum_{i=\hat{k}+2}^n I_\ell - Q_i \right)^{-1} \sum_{i=\hat{k}+1}^n \Delta_i \right) \\ \stackrel{\text{Bem. 3.44 } P\text{-f.s.}}{=} & \mathcal{O} \left((n - \hat{k})^{-1} \left(\sum_{i=\hat{k}+1}^n \Delta_i \right)' \left(\sum_{i=\hat{k}+1}^n \Delta_i \right) \right) \\ \stackrel{\text{Theorem 3.11, Iter.Log.}}{=} & \mathcal{O}_P(\log \log n). \end{aligned} \quad (3.4.157)$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\frac{1}{n-2} \left(- \sum_{i=\hat{k}+3}^n \frac{\hat{\delta}'_2 Q_i \hat{\delta}_2 - \hat{\delta}'_2 Q_i Q_{i-1} \hat{\delta}_2 + \hat{\delta}'_2 Q'_i Q_i Q_{i-1} \hat{\delta}_2 - \hat{\delta}'_2 Q'_i Q_i \hat{\delta}_2}{\text{Sp}(Q'_i Q_i)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\hat{\delta}'_2 Q_{\hat{k}+2} \hat{\delta}_2}{\text{Sp}(Q'_{\hat{k}+2} Q_{\hat{k}+2})} + \frac{\hat{\delta}'_2 Q'_{\hat{k}+2} Q_{\hat{k}+2} \hat{\delta}_2}{\text{Sp}(Q'_{\hat{k}+2} Q_{\hat{k}+2})} \right) \right) \\ \stackrel{(3.4.9), (3.4.10)}{=} & \mathcal{O} \left(\mathbb{E} \left(\frac{n - \hat{k}}{n-2} \hat{\delta}'_2 \hat{\delta}_2 \right) \right) \\ \stackrel{(3.4.157)}{=} & o \left(\frac{(\log \log n)^q}{n} \right) \quad \forall q > 1. \end{aligned} \quad (3.4.158)$$

Aus (3.4.154), (3.4.158) folgt die asymptotische Erwartungstreue von $\hat{\sigma}_n^2$, d.h. (3.4.152).

Analog zu (3.4.122) folgt:

$$\sum_{i=\hat{k}+1}^n \Delta'_i (I_\ell - Q_i) \hat{\delta}_2 \stackrel{(3.4.9), (3.4.156), (3.4.157), \text{Th. 3.11, Iter.Log.}}{=} \mathcal{O}_P(\log \log n). \quad (3.4.159)$$

Analog zu (3.4.123) erhalten wir mit (3.4.8), (3.4.9), (3.4.11), (3.4.157), (3.4.159):

$$\begin{aligned} & \sum_{i=\hat{k}+2}^n \frac{(\Delta_i - (I_\ell - Q_j) \hat{\delta}_2)' (\Delta_i - (I_\ell - Q_j) \hat{\delta}_2)}{\text{Sp}(H'_i H_i)} + \frac{(\Delta_{\hat{k}+1} - I_\ell \hat{\delta}_2)' (\Delta_{\hat{k}+1} - I_\ell \hat{\delta}_2)}{\text{Sp}(H'_{\hat{k}+1} H_{\hat{k}+1})} \\ = & \sum_{i=\hat{k}+1}^n \frac{\Delta'_i \Delta_i}{\text{Sp}(H'_i H_i)} + \mathcal{O}_P(\log \log n). \end{aligned} \quad (3.4.160)$$

Mit (3.4.155), (3.4.160) folgt analog zu (3.4.124) für alle $q > 1$:

$$\mathbb{E}(\hat{\zeta}_n^2) = \tau^2 + \sigma^2 \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n \mathbb{E} \left(\frac{\ell + \text{Sp}(Q'_i Q_i)}{\text{Sp}(H'_i H_i)} \right) + o_P \left(\frac{(\log \log n)^q}{n} \right). \quad (3.4.161)$$

Unter Ausnutzung der asymptotischen Erwartungstreue von $\hat{\sigma}_n$ erhalten wir aus (3.4.161) (3.4.153), d.h. die asymptotische Erwartungstreue von $\hat{\tau}_n$.

Wir wählen $\tilde{\sigma}_n^2$, $\tilde{\zeta}_n^2$, $\tilde{\tau}_n^2$ wie im Beweis zu Theorem 3.17, so dass wie dort gilt:

$$|\tilde{\sigma}_n^2 - \sigma^2| = \mathcal{O}_P \left(n^{-\frac{\delta}{2+\delta}} \right), \quad (3.4.162)$$

$$|\tilde{\tau}_n^2 - \tau^2| = \mathcal{O}_P \left(n^{-\frac{\delta}{2+\delta}} \right). \quad (3.4.163)$$

Weiter gilt:

$$|\tilde{\sigma}_n^2 - \hat{\sigma}_n^2| \stackrel{(3.4.9), (3.4.10), (3.4.157)}{=} \mathcal{O}_P \left(\frac{\log \log n}{n} \right). \quad (3.4.164)$$

Aus (3.4.162) und (3.4.164) folgt (3.4.150).

Analog zu (3.4.128) folgt:

$$|\tilde{\zeta}_n^2 - \hat{\zeta}_n^2| \stackrel{(3.4.9), (3.4.11), (3.4.157), (3.4.159)}{=} \mathcal{O}_P \left(\frac{\log \log n}{n} \right). \quad (3.4.165)$$

Mit (3.4.164) und (3.4.165) folgt:

$$|\hat{\tau}_n^2 - \tilde{\tau}_n^2| \stackrel{(3.4.9), (3.4.11), (3.4.164), (3.4.165)}{=} \mathcal{O}_P \left(\frac{\log \log n}{n} \right). \quad (3.4.166)$$

Aus (3.4.163) und (3.4.166) erhalten wir (3.4.151). \square

Wir untersuchen nun das asymptotische Verhalten der Varianzschätzer unter der Alternative $H_A^{(2)}$.

Theorem 3.20. *Es gelte $H_A^{(2)}$, (3.4.1)-(3.4.15), (3.4.147)-(3.4.149), σ^2 , τ^2 nicht beide 0, $\delta_2 = \delta_2(n) = \mathcal{O}(1)$. Dann sind $\hat{\sigma}_n^2$, $\hat{\tau}_n^2$ konsistente Schätzer für σ^2 bzw. τ^2 . Genauer gilt:*

$$|\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2| = o_P(1), \quad (3.4.167)$$

$$|\hat{\tau}_n^2 - \tau^2| = o_P(1). \quad (3.4.168)$$

Beweis: Der Beweis von Theorem 3.20 verläuft ähnlich zum Beweis von Theorem 3.18. Alle asymptotischen Aussagen gelten für $n \rightarrow \infty$.

Analog zu (3.4.136) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 & (n - \hat{k}) \left(\hat{\delta}_2 - \delta_2 \right)' \left(\hat{\delta}_2 - \delta_2 \right) \\
 = & (n - \hat{k}) \\
 & \left(\left(\sum_{i=\hat{k}+2}^n I_\ell - Q_i \right)^{-1} \sum_{i=\hat{k}+2}^{n-1} (I_\ell - Q_i) \varepsilon_{i-1} + \varepsilon_n - Q_{\hat{k}+1} \varepsilon_{\hat{k}} \right. \\
 & \left. - \left(\sum_{i=\hat{k}+2}^{n-1} I_\ell - Q_i \right)^{-1} \sum_{i=\hat{k}+2}^{n-1} (I_\ell - Q_i) \delta_2 \right)' \\
 & (n - \hat{k}) \\
 & \left(\left(\sum_{i=\hat{k}+2}^n I_\ell - Q_i \right)^{-1} \sum_{i=\hat{k}+2}^{n-1} (I_\ell - Q_i) \varepsilon_{i-1} + \varepsilon_n - Q_{\hat{k}+1} \varepsilon_{\hat{k}} - \right. \\
 & \left. \left(\sum_{i=\hat{k}+2}^{n-1} I_\ell - Q_i \right)^{-1} \sum_{i=\hat{k}+2}^{n-1} (I_\ell - Q_i) \delta_2 \right) \\
 \stackrel{\text{Bem. 3.46 } P\text{-f.s.}}{=} & \mathcal{O} \left((n - \hat{k})^{-1} \left(\sum_{i=\hat{k}+2}^{n-1} (I_\ell - Q_i) (\varepsilon_{i-1} - \mathbb{E} \varepsilon_{i-1}) + \mathcal{O}_P(1) \right)' \right. \\
 & \left. \left(\sum_{i=\hat{k}+2}^{n-1} (I_\ell - Q_i) (\varepsilon_{i-1} - \mathbb{E} \varepsilon_{i-1}) + \mathcal{O}_P(1) \right) \right) \\
 \stackrel{(3.4.3), (3.4.5), \text{Th. 3.11, Iter. Log.}}{=} & \mathcal{O}_P(\log \log n). \tag{3.4.169}
 \end{aligned}$$

Ähnlich wie im Beweis zu Theorem 3.18 definieren wir:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma}_n^2 &:= -\frac{1}{n-2} \left(\sum_{i=3}^n \frac{\Delta_i' Q_i \Delta_{i-1}}{\text{Sp}(Q_i' Q_i)} - \frac{\delta_2' Q_{k^*+2} \delta_2}{\text{Sp}(Q_{k^*+2}' Q_{k^*+2})} + \frac{\delta_2' \mathbb{E} Q_{k^*+2}' \mathbb{E} Q_{k^*+2} \delta_2}{\text{Sp}(Q_{k^*+2}' Q_{k^*+2})} \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{i=k^*+3}^n \frac{\delta_2' Q_i \delta_2 - \delta_2' Q_i Q_{i-1} \delta_2 + \delta_2' Q_i' Q_i Q_{i-1} \delta_2 - \delta_2' \mathbb{E} Q_i' \mathbb{E} Q_i \delta_2}{\text{Sp}(Q_i' Q_i)} \right), \\
 \tilde{\zeta}_n^2 &:= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=2}^{k^*} \frac{\Delta_i' \Delta_i}{\text{Sp}(H_i' H_i)} + \sum_{i=k^*+2}^n \frac{(\Delta_i - (I_\ell - Q_i) \delta_2)' (\Delta_i - (I_\ell - Q_i) \delta_2)}{\text{Sp}(H_i' H_i)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(\Delta_{k^*+1} - I_\ell \delta_2)' (\Delta_{k^*+1} - I_\ell \delta_2)}{\text{Sp}(H_{k^*+1}' H_{k^*+1})} \right), \\
 \tilde{\tau}_n^2 &:= \tilde{\zeta}_n^2 - \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n \frac{\ell + \text{Sp}(Q_i' Q_i)}{\text{Sp}(H_i' H_i)} \tilde{\sigma}_n^2.
 \end{aligned}$$

Analog wie im Beweis zu Theorem 3.16 erhalten wir:

$$|\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2| = \mathcal{O}_P \left(n^{-\frac{\delta}{2+\delta}} \right), \quad (3.4.170)$$

$$|\hat{\tau}_n^2 - \tau^2| = \mathcal{O}_P \left(n^{-\frac{\delta}{2+\delta}} \right). \quad (3.4.171)$$

Analog zum Beweis von Theorem 3.18 zeigt man:

$$|\hat{\sigma}_n^2 - \tilde{\sigma}_n^2| = o_P(1), \quad (3.4.172)$$

$$|\hat{\zeta}_n^2 - \tilde{\zeta}_n^2| = o_P(1). \quad (3.4.173)$$

Weiter gilt:

$$|\hat{\tau}_n^2 - \tilde{\tau}_n^2| \stackrel{(3.4.9), (3.4.11), (3.4.172), (3.4.173)}{=} o_P(1). \quad (3.4.174)$$

Aus (3.4.170) und (3.4.172) erhalten wir (3.4.167).

Aus (3.4.171) und (3.4.174) folgt (3.4.168). \square

3.4.8.4 Varianzschätzer im 3. Changepoint-Modell

Für unser drittes Changepoint-Modell ist eine analoge Vorgehensweise wie oben nicht möglich, falls die Sprunghöhen δ_1 , δ_2 beide unbekannt sind. In Abschnitt 3.4.8.2 bzw. 3.4.8.3 sind wir so vorgegangen, dass wir zunächst die unbekannten Sprunghöhen in den Changepoints geschätzt haben. Unter der Alternative $H_A^{(3)}$ liegt ein simultaner Wechsel in beiden Fehlerprozessen mit i.A. unbekannten Sprunghöhen δ_1 bzw. δ_2 vor. Es ist nicht möglich festzustellen, ob $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ oder $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ oder beide mit einer bestimmten Gewichtung für auftretende Abweichungen vom Modell verantwortlich sind. Um dennoch zuverlässige Schätzer für die Varianzen der Fehlerprozesse zu erhalten, gehen wir so vor, dass wir die Varianzen unter Verwendung der Beobachtungen bis zum geschätzten Zeitpunkt des Changepoints schätzen. Ein Nachteil dieser Vorgehensweise liegt darin, dass insbesondere für den Fall der Nullhypothese der geschätzte Zeitpunkt für einen Changepoint sehr klein sein kann, und somit nicht genügend Beobachtungen in die Varianzschätzer einfließen.

$$\begin{aligned} \text{Sei} \quad \hat{\sigma}_n^2 &:= -\frac{1}{\hat{k} - 2} \sum_{i=3}^{\hat{k}} \frac{\Delta_i' Q_i \Delta_{i-1}}{\text{Sp}(Q_i' Q_i)}, \\ \hat{\tau}_n^2 &:= \hat{\zeta}_n^2 - \frac{1}{\hat{k} - 1} \sum_{i=2}^{\hat{k}} \frac{\ell + \text{Sp}(Q_i' Q_i)}{\text{Sp}(H_i' H_i)} \hat{\sigma}_n^2, \\ \text{wobei} \quad \hat{\zeta}_n^2 &:= \frac{1}{\hat{k} - 1} \sum_{i=2}^{\hat{k}} \frac{\Delta_i' \Delta_i}{\text{Sp}(H_i' H_i)}, \\ \hat{k} &= \hat{k}(n) \quad (1 \leq \hat{k} < n) \text{ ein Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints.} \end{aligned}$$

Die obigen Bezeichner seien nur für Abschnitt 3.4.8.4 gültig.

Für den Fall der Nullhypothese gilt das folgende Theorem.

Theorem 3.21. *Es gelte H_0 , (3.4.1)-(3.4.11), (3.4.14), (3.4.15). Weiter gelte:*

$$\exists f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f \uparrow \infty : f(n) \leq \hat{k}(n) \leq n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Dann sind $\hat{\sigma}_n^2$, $\hat{\tau}_n^2$ konsistente, asymptotisch erwartungstreue Schätzer für σ^2 bzw. τ^2 .
Genauer gilt für $n \rightarrow \infty$:*

$$|\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2| = \mathcal{O}_P \left(f(n)^{-\frac{\delta}{2+\delta}} \right), \quad (3.4.175)$$

$$|\hat{\tau}_n^2 - \tau^2| = \mathcal{O}_P \left(f(n)^{-\frac{\delta}{2+\delta}} \right), \quad (3.4.176)$$

$$\mathbb{E} \hat{\sigma}_n^2 = \sigma^2 + \mathcal{O} \left(f(n)^{-1} \right), \quad (3.4.177)$$

$$\mathbb{E} \hat{\tau}_n^2 = \tau^2 + \mathcal{O} \left(f(n)^{-1} \right). \quad (3.4.178)$$

Beweis: Sei für $2 < k \leq n$:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_k^2 &:= -\frac{1}{k-2} \sum_{i=3}^k \frac{\Delta_i' Q_i \Delta_{i-1}}{\text{Sp}(Q_i' Q_i)}, \\ \tilde{\tau}_k^2 &:= \tilde{\zeta}_k^2 - \frac{1}{k-1} \sum_{i=2}^k \frac{\ell + \text{Sp}(Q_i' Q_i)}{\text{Sp}(H_i' H_i)} \tilde{\sigma}_k^2, \end{aligned}$$

$$\text{wobei} \quad \tilde{\zeta}_k^2 := \frac{1}{k-1} \sum_{i=2}^k \frac{\Delta_i' \Delta_i}{\text{Sp}(H_i' H_i)}.$$

Dann folgt (vgl. Theorem 3.16):

$$|\tilde{\sigma}_k^2 - \sigma^2| = \mathcal{O}_P \left(k^{-\frac{\delta}{2+\delta}} \right) \quad (k \rightarrow \infty), \quad (3.4.179)$$

$$|\tilde{\tau}_k^2 - \tau^2| = \mathcal{O}_P \left(k^{-\frac{\delta}{2+\delta}} \right) \quad (k \rightarrow \infty). \quad (3.4.180)$$

Mit Lemma 7.7 erhalten wir aus (3.4.179), (3.4.180):

$$\max_{f(n) \leq k \leq n} |\tilde{\sigma}_k^2 - \sigma^2| = \mathcal{O}_P \left(f(n)^{-\frac{\delta}{2+\delta}} \right) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.4.181)$$

$$\max_{f(n) \leq k \leq n} |\tilde{\tau}_k^2 - \tau^2| = \mathcal{O}_P \left(f(n)^{-\frac{\delta}{2+\delta}} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.4.182)$$

Aus (3.4.181), (3.4.182) folgt (3.4.175), (3.4.176).

Ebenso erhalten wir analog zum Beweis von Theorem 3.16 mit Lemma 7.7:

$$\max_{f(n) \leq k \leq n} |\mathbb{E} \tilde{\sigma}_k^2 - \sigma^2| = \mathcal{O} \left(f(n)^{-1} \right) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.4.183)$$

$$\max_{f(n) \leq k \leq n} |\mathbb{E} \tilde{\tau}_k^2 - \tau^2| = \mathcal{O} \left(f(n)^{-1} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.4.184)$$

Aus (3.4.183), (3.4.184) folgt (3.4.177), (3.4.178). \square

Bemerkung 3.47. Wir erhalten in Theorem 3.21 asymptotische Aussagen, wenn gilt: $\hat{k} \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). Dies ist i.A. unter der Nullhypothese nicht der Fall. Wir nehmen deshalb eine Modifikation des Schätzers für den Zeitpunkt des Changepoints vor. Wir setzen voraus, dass für den Fall eines Changepoints im dritten Changepoint-Modell gilt:

$$k^* = k^*(n) \rightarrow \infty.$$

Für einen beliebigen Schätzer \tilde{k} für den Zeitpunkt des Changepoints definieren wir einen neuen Schätzer:

$$\hat{k} := \max \left\{ h_n, \tilde{k} \right\},$$

wobei h_n eine Folge mit $h_n = o(k^*)$ und $h_n \uparrow \infty$ ist.

Für n hinreichend groß gilt damit: $h_n < k^*$. Asymptotisch approximiert \hat{k} k^* unter der Alternative $H_A^{(3)}$ also mindestens genauso gut wie \tilde{k} . Der Schätzer \hat{k} für den Zeitpunkt des Changepoints hat gegenüber \tilde{k} den Vorteil, dass sehr kleine Werte ausgeschlossen werden (für n hinreichend groß). Mit einem solchen Schätzer sind auch asymptotische Aussagen für die oben definierten Varianzschätzer im Fall der Nullhypothese möglich. Ein Nachteil von \hat{k} ist, dass frühe Changepoints für kleine n schlecht geschätzt werden.

Bemerkung 3.48. Wählen wir in Bemerkung 3.47 h_n so, dass gilt:

$$(\log \log n)^{\frac{4+2\delta}{\delta}} = o(h_n), \text{ so erfüllen } \hat{\sigma}_n^2, \hat{\tau}_n^2 \text{ die Bedingungen (3.4.63) bzw. (3.4.64).}$$

Für den Fall der Alternative $H_A^{(3)}$ erhalten wir das folgende Theorem.

Theorem 3.22. Es gelte $H_A^{(3)}$, (3.4.1)-(3.4.11), (3.4.14), (3.4.15). Weiter gelte:

$$\frac{\hat{k} - k^*}{n} = o_P(1), \quad n = \mathcal{O}(k^*) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.4.185)$$

Dann sind $\hat{\sigma}_n^2, \hat{\tau}_n^2$ konsistente Schätzer für σ^2 bzw. τ^2 . Genauer gilt für $n \rightarrow \infty$:

$$|\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2| = o_P(1), \quad (3.4.186)$$

$$|\hat{\tau}_n^2 - \tau^2| = o_P(1). \quad (3.4.187)$$

Beweis: Sei $k^* \leq \hat{k}$. (Der Fall $k^* \geq \hat{k}$ folgt analog zum Beweis von Theorem 3.21.)

Insbesondere gilt damit: $n = \mathcal{O}(\hat{k})$.

Alle asymptotischen Aussagen im Beweis zu Theorem 3.22 gelten für $n \rightarrow \infty$.

Mit (3.4.8), (3.4.9), (3.4.11), (3.4.21) folgt:

$$\mathbb{E}(\Delta'_i \Delta_i) = \mathbb{E}(\tau^2 \text{Sp}(H'_i H_i) + \sigma^2(\ell + \text{Sp}(Q'_i Q_i))) + \text{const } \mathbb{I}_{\{i > k^*\}}. \quad (3.4.188)$$

Die Konstante const kann dabei unabhängig von i gewählt werden.

Mit Lemma 7.7 und Lemma 7.8 folgt aus (3.4.188) mit (3.4.8), (3.4.9):

$$\max_{2 \leq i \leq n} \Delta'_i \Delta_i = \mathcal{O}_P(1), \quad \max_{2 \leq i \leq n} \Delta_i = \mathcal{O}_P(1). \quad (3.4.189)$$

$$\begin{aligned} \text{Sei} \quad \tilde{\sigma}_n^2 &:= -\frac{1}{k^* - 2} \sum_{i=3}^{k^*} \frac{\Delta'_i Q_i \Delta_{i-1}}{\text{Sp}(Q'_i Q_i)}, \\ \tilde{\zeta}_n^2 &:= \frac{1}{k^* - 1} \sum_{i=2}^{k^*} \frac{\Delta'_i \Delta_i}{\text{Sp}(H'_i H_i)}, \\ \tilde{\tau}_n^2 &:= \tilde{\zeta}_n^2 - \frac{1}{k^* - 1} \sum_{i=2}^{k^*} \frac{\ell + \text{Sp}(Q'_i Q_i)}{\text{Sp}(H'_i H_i)} \tilde{\sigma}_n^2. \end{aligned}$$

Analog wie im Beweis zu Theorem 3.16 erhalten wir:

$$|\tilde{\sigma}_n^2 - \sigma^2| = \mathcal{O}_P\left(k^{*- \frac{\delta}{2+\delta}}\right), \quad (3.4.190)$$

$$|\tilde{\tau}_n^2 - \tau^2| = \mathcal{O}_P\left(k^{*- \frac{\delta}{2+\delta}}\right). \quad (3.4.191)$$

Wir schätzen nun den Fehler ab, der beim Übergang von $\tilde{\sigma}_n^2$ zu $\hat{\sigma}_n^2$ entsteht.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\hat{k} - 2} \sum_{i=3}^{\hat{k}} \frac{\Delta'_i Q_i \Delta_{i-1}}{\text{Sp}(Q'_i Q_i)} - \frac{1}{\hat{k} - 2} \sum_{i=3}^{k^*} \frac{\Delta'_i Q_i \Delta_{i-1}}{\text{Sp}(Q'_i Q_i)} \right| \\ & \stackrel{(3.4.8)-(3.4.10)}{=} \mathcal{O}\left(\frac{\hat{k} - k^*}{\hat{k}} \max_{1 \leq i \leq \hat{k}} \Delta'_i \Delta_i\right) \\ & \stackrel{(3.4.185), n=\mathcal{O}(\hat{k}), (3.4.189)}{=} o_P(1). \end{aligned} \quad (3.4.192)$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{k^* - 2} \sum_{i=3}^{k^*} \frac{\Delta'_i Q_i \Delta_{i-1}}{\text{Sp}(Q'_i Q_i)} - \frac{1}{\hat{k} - 2} \sum_{i=3}^{k^*} \frac{\Delta'_i Q_i \Delta_{i-1}}{\text{Sp}(Q'_i Q_i)} \right| \\ & \stackrel{(3.4.8)-(3.4.10)}{=} \mathcal{O}\left(\frac{\hat{k} - k^*}{\hat{k}} \max_{1 \leq i \leq k^*} \Delta'_i \Delta_i\right) \\ & \stackrel{(3.4.185), n=\mathcal{O}(\hat{k}), (3.4.189)}{=} o_P(1). \end{aligned} \quad (3.4.193)$$

$$|\hat{\sigma}_n - \tilde{\sigma}_n| \stackrel{(3.4.192), (3.4.193)}{=} o_P(1). \quad (3.4.194)$$

$$|\hat{\sigma}_n - \tilde{\sigma}_n| \stackrel{(3.4.192), (3.4.193)}{=} o_P(1). \quad (3.4.195)$$

Aus (3.4.190) und (3.4.195) folgt (3.4.186).

Analog zu (3.4.195) zeigt man:

$$|\hat{\zeta}_n - \tilde{\zeta}_n| = o_P(1). \quad (3.4.196)$$

$$|\hat{\tau}_n - \tilde{\tau}_n| \stackrel{(3.4.195), (3.4.196)}{=} o_P(1). \quad (3.4.197)$$

Aus (3.4.197) folgt mit (3.4.191) (3.4.187). \square

3.4.9 Simulationen

Bei der Konstruktion von Matrizenfolgen $\{G_i\}_{1 \leq i \leq n}$, $\{H_i\}_{1 \leq i \leq n}$ gehen wir wie folgt vor:

Ausgehend von Matrizen

$$C^{(1)} := \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

$$C^{(2)} := \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

erzeugen wir Folgen von "Störmatrizen" $\{S_k^{(1)}\}_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\{S_k^{(2)}\}_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit Erwartungswert 0, für die gilt:

$$S_k^{(i)} \stackrel{P-f.s.}{=} \mathcal{O}\left(k^{-\frac{1}{2}}\right) \quad (i=1,2)$$

und definieren:

$$\begin{aligned} C_k^{(1)} &:= C^{(1)} + S_k^{(1)}, \\ C_k^{(2)} &:= C^{(2)} + S_k^{(2)}. \end{aligned}$$

Für $C_k^{(1)}$, $C_k^{(2)}$ führen wir Cholesky-Zerlegungen durch und erhalten Matrizen

$D^{(1)}$, $D^{(2)} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, für die gilt:

$$\begin{aligned} C_k^{(1)} &= D_k^{(1)} D_k^{(1)'} , \\ C_k^{(2)} &= D_k^{(2)} D_k^{(2)'} . \end{aligned}$$

Nun definieren wir:

$$\begin{aligned} G_k &:= D^{(1)'} O, \\ H_k &:= D^{(2)'} O, \end{aligned}$$

wobei

$$O := \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Durch Multiplikation mit der orthogonalen Matrix O erhalten wir Matrizenfolgen $\{G_k\}_{1 \leq k \leq n}$, $\{H_k\}_{1 \leq k \leq n}$, deren deterministische Anteile Eigenwerte haben, die kleiner als 1 sind. Hierdurch wird die Konvergenz der Matrizenfolgen beschleunigt.

Die in den Matrizen $S_k^{(i)}$ ($i=1,2$) auftretenden zufälligen Fehler werden durch standard-normalverteilte Zufallsvariablen erzeugt.

Bei allen Simulationsläufen, deren Ergebnisse wir in diesem Abschnitt vorstellen, betrachten wir das in Abschnitt 3.4.1 vorgestellte Modell mit $p = \ell = 2$. Die Fehlerprozesse $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ bzw. $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ werden als Folge i.i.d. normalverteilter Zufallsvektoren mit

$\text{Cov } \varepsilon_i = \text{Cov } \omega_i = I_2$ simuliert. Zur Varianzschätzung im 3. Changepoint-Modell (vgl. Abschnitt 3.4.8.4) wird $h_n := 4 \lceil \log n + 0.5 \rceil$ gewählt.

3.4.9.1 Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints

Bei den Simulationen bezüglich des Schätzers für den Zeitpunkt des Changepoints gehen wir so vor, dass wir für $n=100$ 1000 Simulationsläufe realisieren. Den Zeitpunkt des Changepoints schätzen wir mit den in Abschnitt 3.4.7 definierten Schätzern \hat{k}_j ($1 \leq j \leq \ell$, komponentenweise) bzw. \hat{k} (Schätzer über alle Komponenten).

Die Simulationsergebnisse machen deutlich, dass ein Changepoint im Fehlerprozess $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ bzw. $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sich nicht gleichermaßen auf alle Komponenten auswirken muss (vgl. auch die Simulationen zum Verhalten der Teststatistiken T_3, T_3^*, T_4, T_4^* in Abschnitt 3.4.9.3).

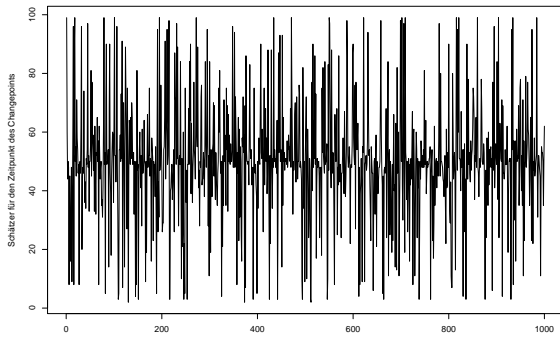


Abbildung 73: Erste Komponente, Changepoint in $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=50$, $\delta_1 = (3, 1)'$, $n=100$.

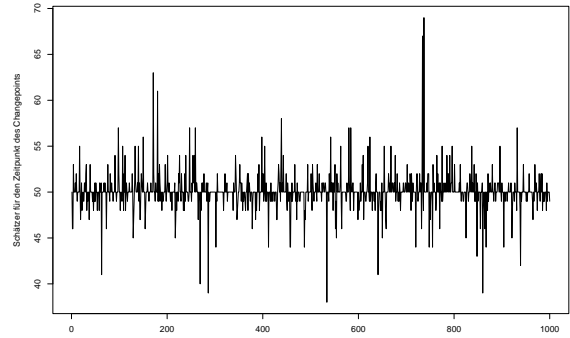


Abbildung 74: Zweite Komponente, Changepoint in $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=50$, $\delta_1 = (3, 1)'$, $n=100$.

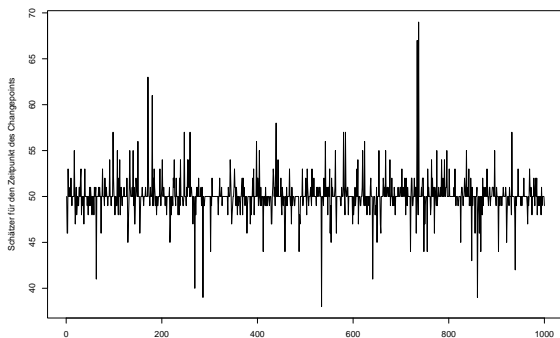


Abbildung 75: Beide Komponenten Changepoint in $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=50$, $\delta_1 = (3, 1)'$, $n=100$.

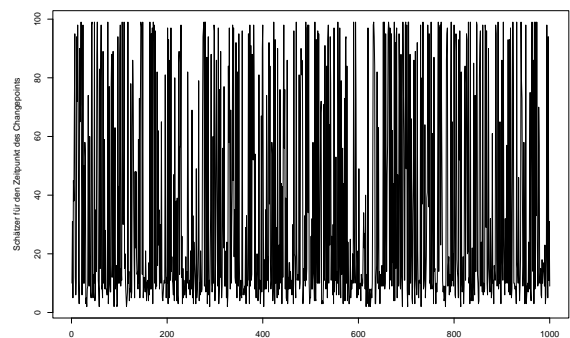


Abbildung 76: Erste Komponente, Changepoint in $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=50$, $\delta_1 = (3, 1)'$, $n=100$.

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

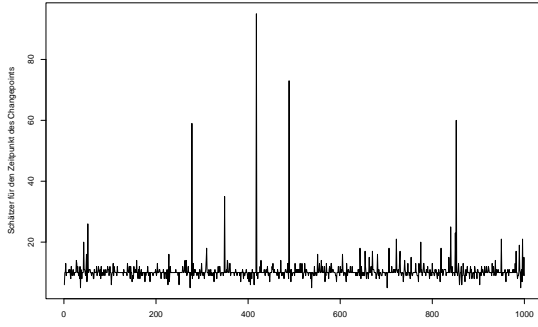


Abbildung 77: Zweite Komponente, Changepoint in $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=10$, $\delta_1 = (3, 1)'$, $n=100$.

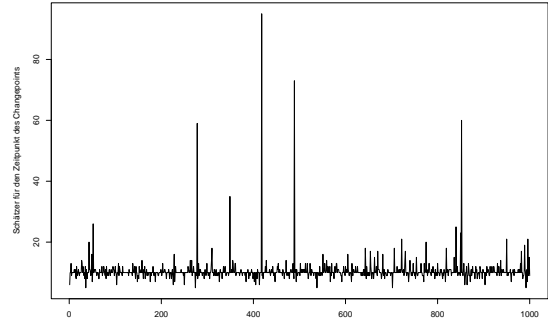


Abbildung 78: Beide Komponenten, Changepoint in $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=10$, $\delta_1 = (3, 1)'$, $n=100$.

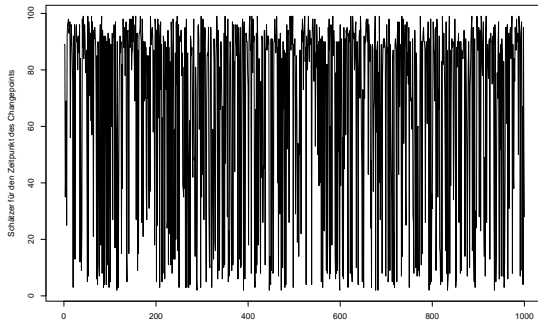


Abbildung 79: Erste Komponente, Changepoint in $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=90$, $\delta_1 = (3, 1)'$, $n=100$.

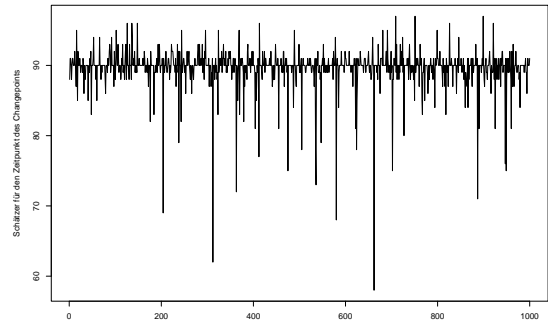


Abbildung 80: Zweite Komponente, Changepoint in $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=90$, $\delta_1 = (3, 1)'$, $n=100$.

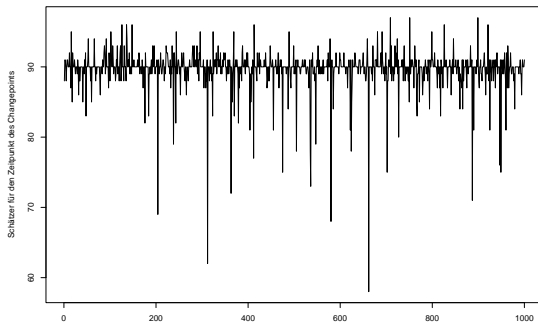


Abbildung 81: Beide Komponenten, Changepoint in $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=90$, $\delta_1 = (3, 1)'$, $n=100$.

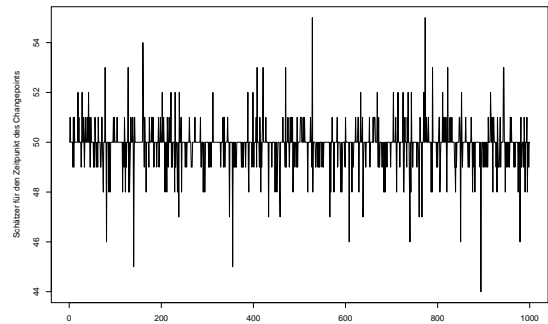


Abbildung 82: Erste Komponente, Changepoint in $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=50$, $\delta_2 = (3, 2)'$, $n=100$.

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

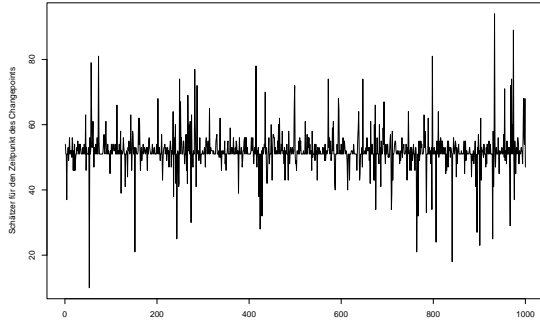


Abbildung 83: Erste Komponente, Changepoint in $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=50$, $\delta_2 = (3, 2)'$, $n=100$.

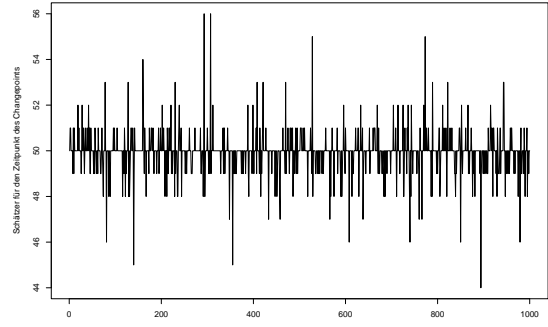


Abbildung 84: Beide Komponenten, Changepoint in $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=50$, $\delta_2 = (3, 2)'$, $n=100$.

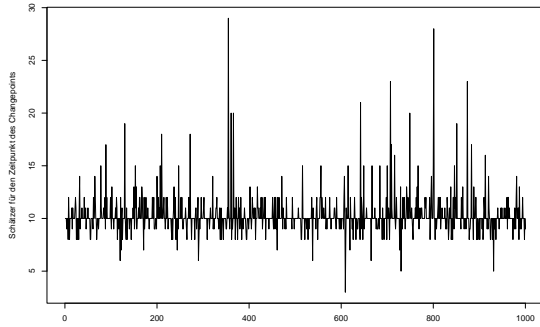


Abbildung 85: Erste Komponente, Changepoint in $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=10$, $\delta_2 = (3, 2)'$, $n=100$.

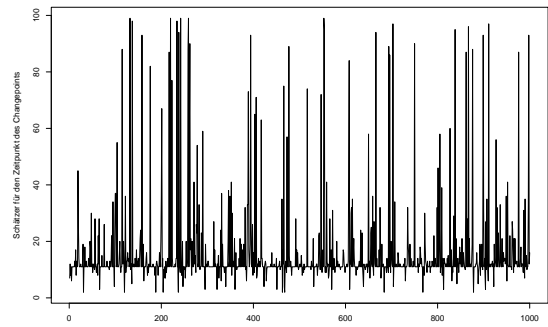


Abbildung 86: Zweite Komponente, Changepoint in $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=10$, $\delta_2 = (3, 2)'$, $n=100$.

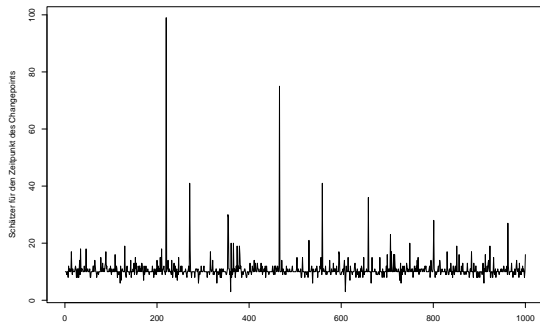


Abbildung 87: Beide Komponenten, Changepoint in $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=10$, $\delta_2 = (3, 2)'$, $n=100$.

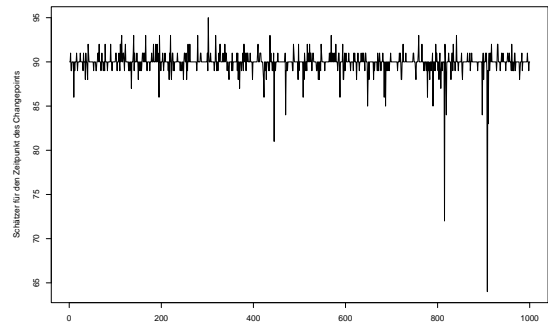


Abbildung 88: Erste Komponente, Changepoint in $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=90$, $\delta_2 = (3, 2)'$, $n=100$.

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

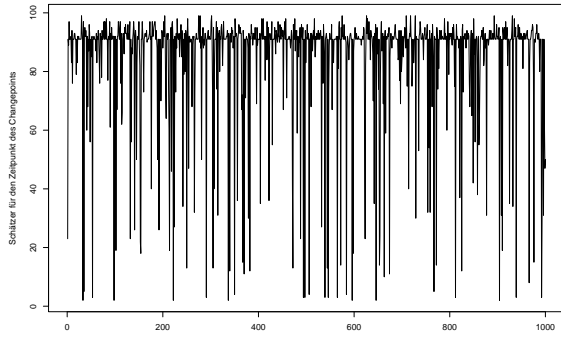


Abbildung 89: Zweite Komponente, Change-point in $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=90$, $\delta_2 = (3, 2)'$, $n=100$.

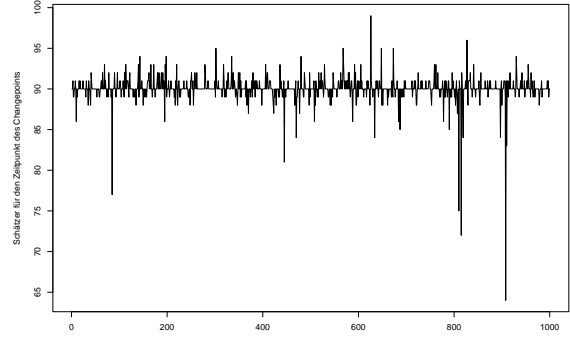


Abbildung 90: Beide Komponenten, Change-point in $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=90$, $\delta_2 = (3, 2)'$, $n=100$.

3.4.9.2 Varianzschätzer

Es werden jeweils 1000 Simulationsläufe für die in Abschnitt 3.4.8 vorgestellten Varianzschätzer durchgeführt. Dabei verstehen wir im Folgenden unter den Varianzschätzern unter der Nullhypothese die in Abschnitt 3.4.8.1 vorgestellten Schätzer. Mit den Varianzschätzern für das 1., 2. bzw. 3. Modell sind die in den Abschnitten 3.4.8.2 - 3.4.8.4 definierten Schätzer gemeint.

Wir erhalten sowohl für den Fall der Nullhypothese als auch für den Fall der Alternativen gute Ergebnisse für die Varianzschätzer der Fehlerprozesse (vgl. auch die Tabellen am Ende von Abschnitt 3.4.9.2).

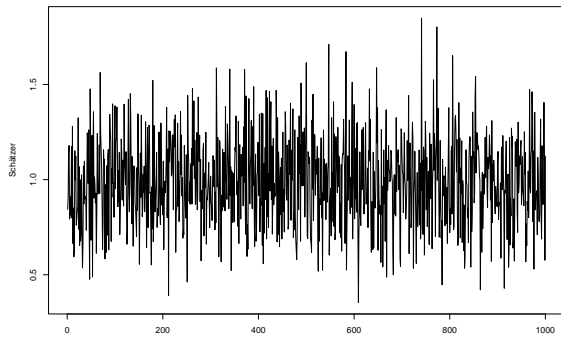


Abbildung 91: Schätzer für σ^2 für die Nullhypothese, kein Changepoint, $n=100$.

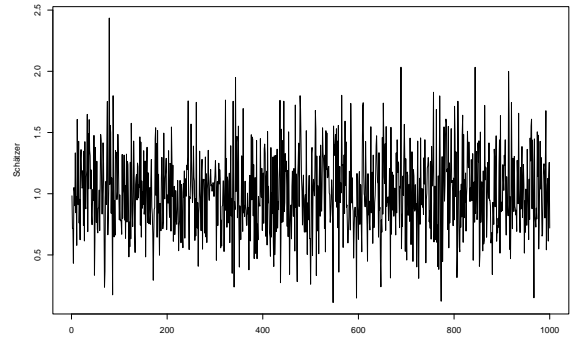


Abbildung 92: Schätzer für τ^2 für die Nullhypothese, kein Changepoint, $n=100$.

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

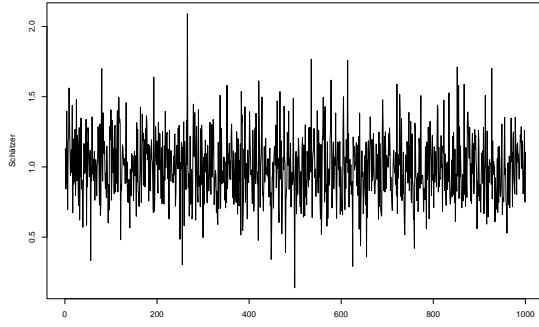


Abbildung 93: Schätzer für σ^2 für erstes Modell, kein Changepoint, $n=100$.

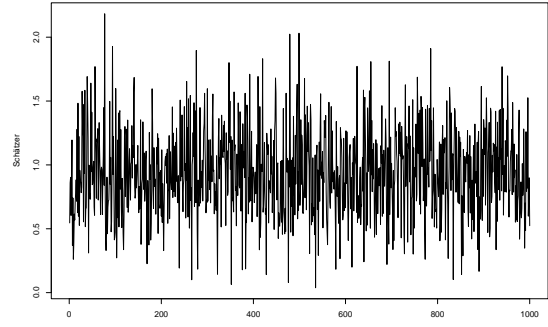


Abbildung 94: Schätzer für τ^2 für erstes Modell, kein Changepoint, $n=100$.

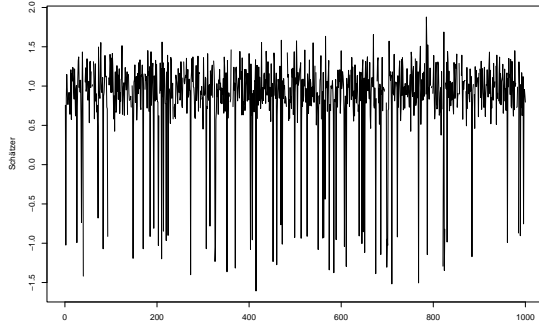


Abbildung 95: Schätzer für σ^2 , τ^2 für zweites Modell, kein Changepoint, $n=100$.

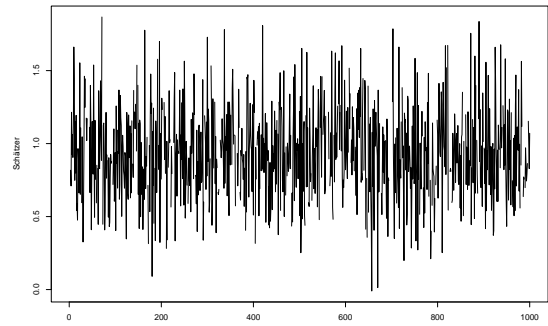


Abbildung 96: Schätzer für τ^2 für zweites Modell, kein Changepoint, $n=100$.

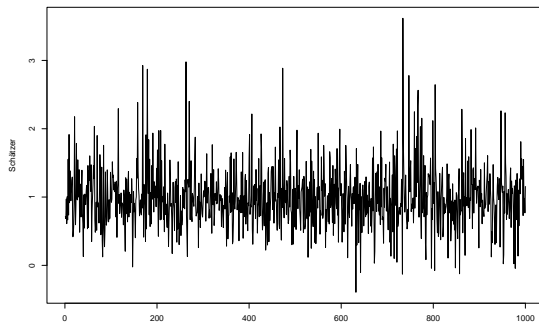


Abbildung 97: Schätzer für σ^2 für drittes Modell, kein Changepoint, $n=100$.

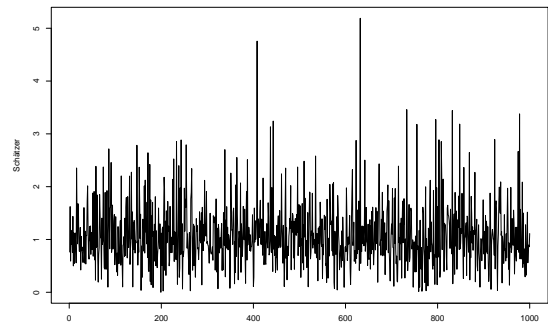


Abbildung 98: Schätzer für τ^2 für drittes Modell, kein Changepoint, $n=100$.

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

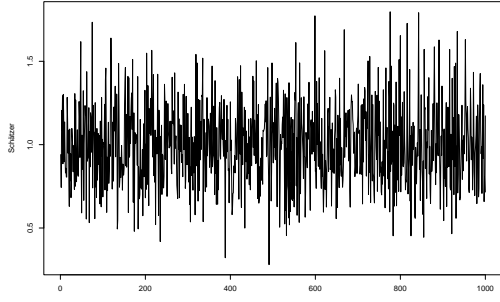


Abbildung 99: Schätzer für σ^2 für erstes Modell, Changepoint in $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=50$, $\delta_1 = (3, 1)'$, $n=100$.

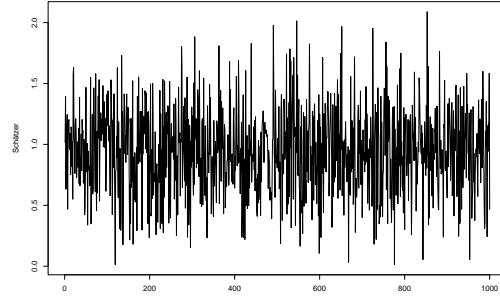


Abbildung 100: Schätzer für τ^2 für erstes Modell, Changepoint in $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=50$, $\delta_1 = (3, 1)'$, $n=100$.

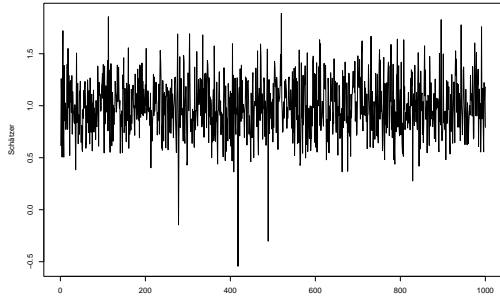


Abbildung 101: Schätzer für σ^2 für erstes Modell, Changepoint in $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=10$, $\delta_1 = (3, 1)'$, $n=100$.

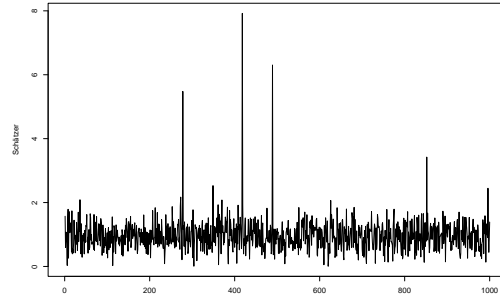


Abbildung 102: Schätzer für τ^2 für erstes Modell, Changepoint in $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=10$, $\delta_1 = (3, 1)'$, $n=100$.

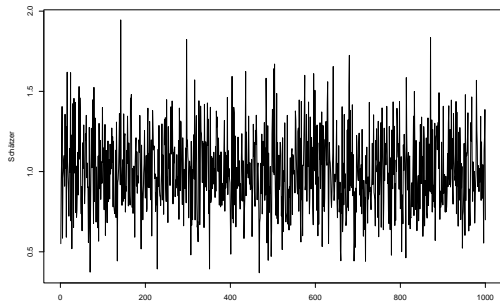


Abbildung 103: Schätzer für σ^2 für erstes Modell, Changepoint in $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=90$, $\delta_1 = (3, 1)'$, $n=100$.

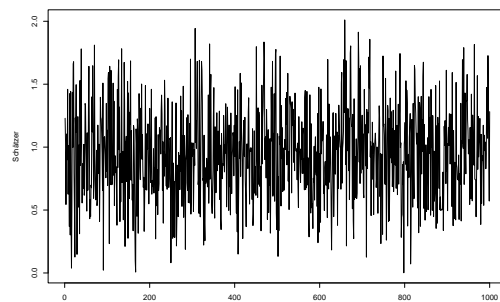


Abbildung 104: Schätzer für τ^2 für erstes Modell, Changepoint in $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=90$, $\delta_1 = (3, 1)'$, $n=100$.

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

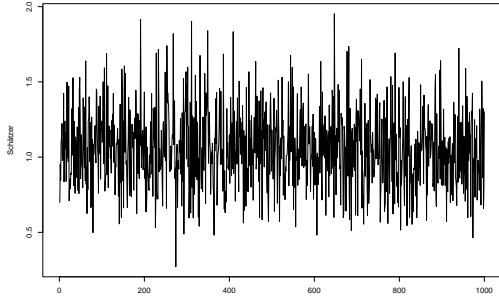


Abbildung 105: Schätzer für σ^2 für zweites Modell, Changepoint in $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=50$, $\delta_2 = (3, 2)'$, $n=100$.

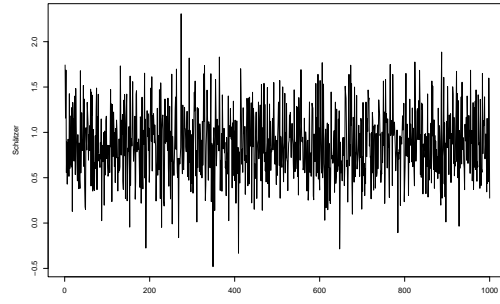


Abbildung 106: Schätzer für τ^2 für zweites Modell, Changepoint in $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=50$, $\delta_2 = (3, 2)'$, $n=100$.

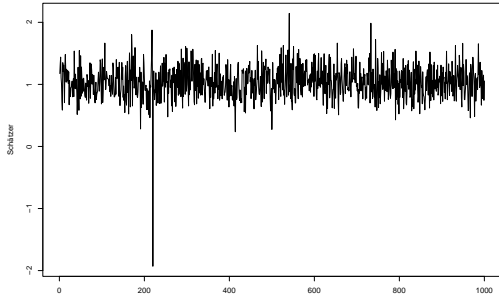


Abbildung 107: Schätzer für σ^2 für zweites Modell, Changepoint in $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=10$, $\delta_2 = (3, 2)'$, $n=100$.

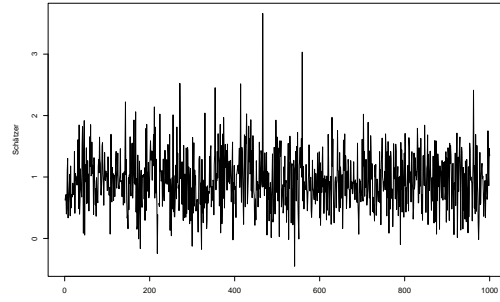


Abbildung 108: Schätzer für τ^2 für zweites Modell, Changepoint in $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=10$, $\delta_2 = (3, 2)'$, $n=100$.

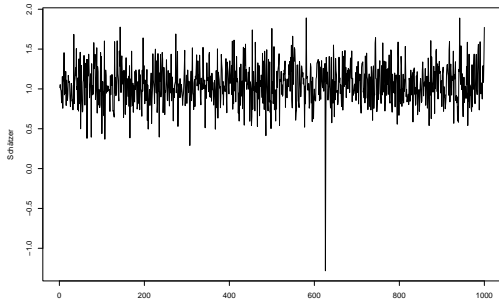


Abbildung 109: Schätzer für σ^2 für zweites Modell, Changepoint in $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=90$, $\delta_2 = (3, 2)'$, $n=100$.

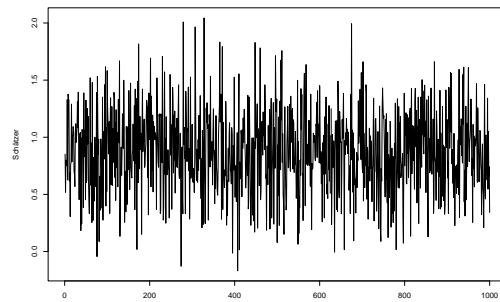


Abbildung 110: Schätzer für τ^2 für zweites Modell, Changepoint in $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=90$, $\delta_2 = (3, 2)'$, $n=100$.

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

In den beiden folgenden Tabellen ist das arithmetische Mittel der Varianzschätzer der Fehlerprozesse über die 1000 Simulationen eingetragen.

	für Nullhypothese	für 1. Modell	für 2. Modell	für 3. Modell
$\hat{\sigma}^2, n=100$	0.991	0.995	0.852	0.994
$\hat{\tau}^2, n=100$	1.012	0.937	0.935	1.084
$\hat{\sigma}^2, n=1000$	1	1	0.936	1.012
$\hat{\tau}^2, n=1000$	1.005	1.001	0.966	1.053

Arithmetisches Mittel über die Varianzschätzer unter der Nullhypothese.

	$k^* = 10,$ $n=100$	$k^* = 50,$ $n=100$	$k^* = 90,$ $n=100$	$k^* = 100,$ $n=1000$	$k^* = 500,$ $n=1000$	$k^* = 900,$ $n=1000$
$\hat{\sigma}^2, H_A^{(1)}, \delta_1 = (3, 1)$	0.994	0.998	1.002	1.001	1.002	1.004
$\hat{\tau}^2, H_A^{(1)}, \delta_1 = (3, 1)$	0.97	0.945	0.942	0.995	0.995	0.991
$\hat{\sigma}^2, H_A^{(2)}, \delta_2 = (3, 2)$	1.113	1.134	1.148	1.017	1.014	1.019
$\hat{\tau}^2, H_A^{(2)}, \delta_2 = (3, 2)$	1.034	1.056	1.059	1.011	1.007	1.007

Arithmetisches Mittel über die Varianzschätzer unter den Alternativen $H_A^{(1)}, H_A^{(2)}$.

3.4.9.3 Asymptotisches Verhalten der Teststatistiken

Zum Vergleich des Verhaltens der Teststatistiken T_3, T_3^* bzw. T_4, T_4^* mit den in den Theoremen 3.12 bzw. 3.13 formulierten asymptotischen Aussagen werden jeweils 1000 Simulationsläufe mit $n=100$ bzw. $n=1000$ Beobachtungen durchgeführt. Über die 1000 Simulationen werden die relativen Häufigkeiten bestimmt, mit denen gilt:

$$a(\log n)T_2^*(n)^{\frac{1}{2}} \leq t + d_p(\log n),$$

wobei $t \in [-1, 6]$. Diese relativen Häufigkeiten werden verglichen mit der Gumbel-Verteilungsfunktion:

$$G(t) = \exp(-2 \exp(-t)).$$

Für den Fall der Nullhypothese erhalten wir sowohl für $n=100$ als auch für $n=1000$ sehr gute Approximationen der bestimmten relativen Häufigkeiten durch die Gumbel-Verteilungsfunktion. Im Fall der Alternative wird wie schon bei den Simulationsstudien zur Schätzung des Zeitpunkts des Changepoints deutlich, dass sich der Strukturbruch nicht gleichmäßig auf alle Komponenten auswirken muss.

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

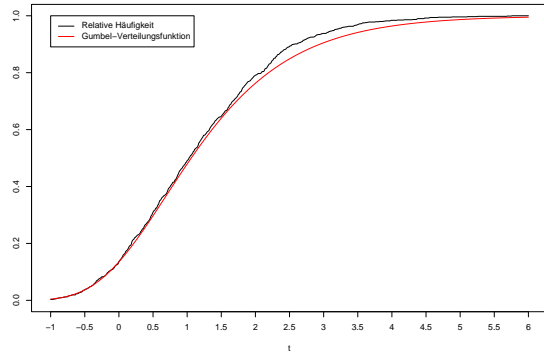


Abbildung 111: T_4 , erste Komponente, kein Changepoint, $n=100$.

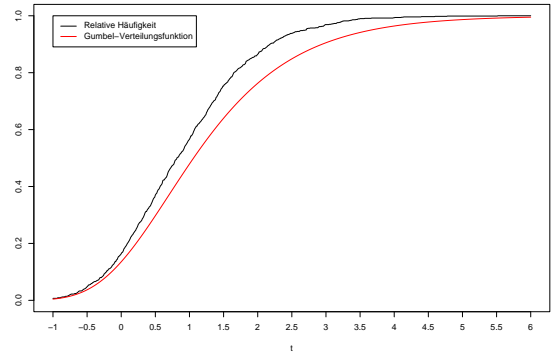


Abbildung 112: T_4 , zweite Komponente, kein Changepoint, $n=100$.

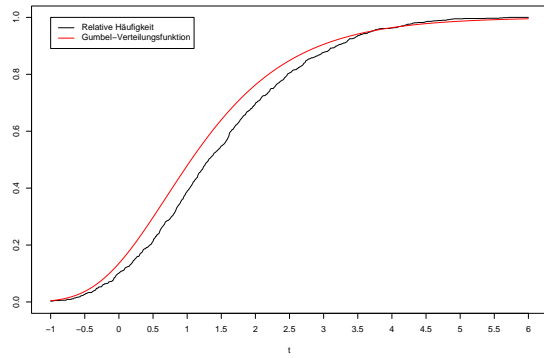


Abbildung 113: T_4 , erste Komponente, kein Changepoint, $n=1000$.

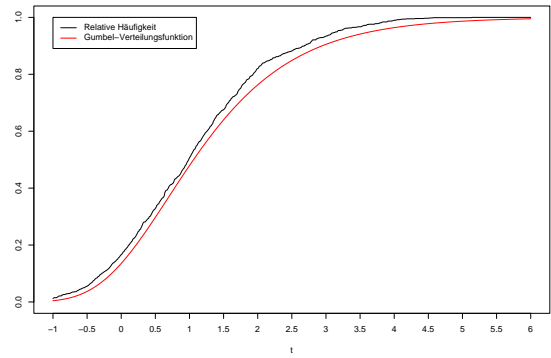


Abbildung 114: T_4 , zweite Komponente, kein Changepoint, $n=1000$.

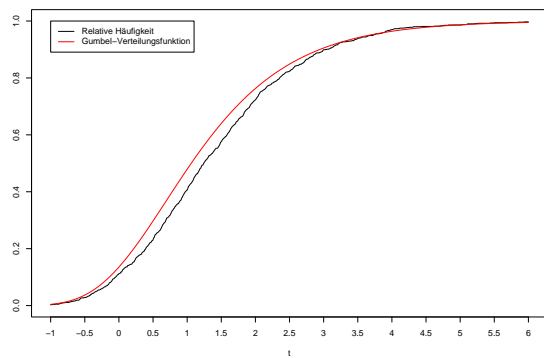


Abbildung 115: T_3 , kein Changepoint, $n=100$.

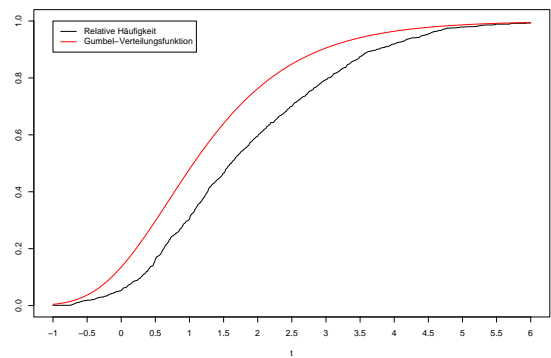


Abbildung 116: T_3 , kein Changepoint, $n=1000$.

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

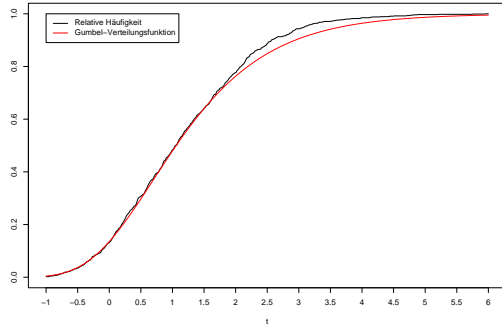


Abbildung 117: T_4^* , erste Komponente, Schätzer von σ^2 , τ^2 für die Nullhypothese, kein Changepoint, $n=100$.

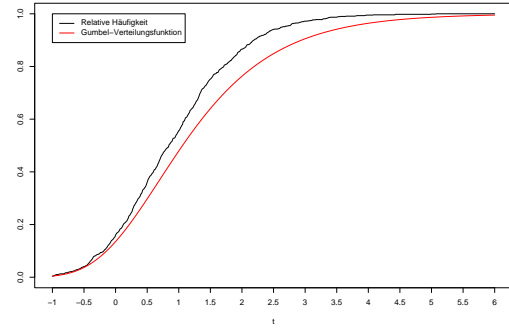


Abbildung 118: T_4^* , zweite Komponente, Schätzer von σ^2 , τ^2 für die Nullhypothese, kein Changepoint, $n=100$.

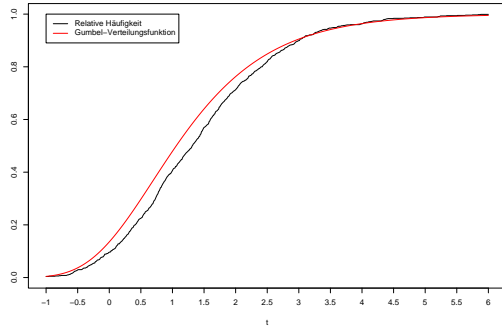


Abbildung 119: T_3^* , Schätzer von σ^2 , τ^2 für die Nullhypothese, kein Changepoint, $n=100$.

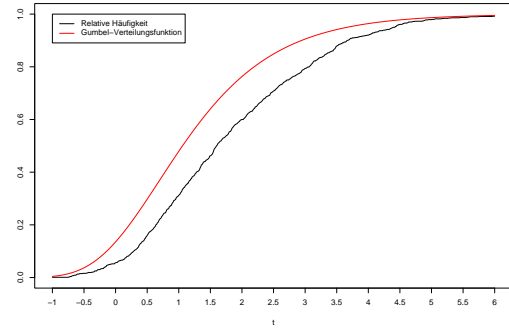


Abbildung 120: T_3^* , Schätzer von σ^2 , τ^2 für die Nullhypothese, kein Changepoint, $n=1000$.

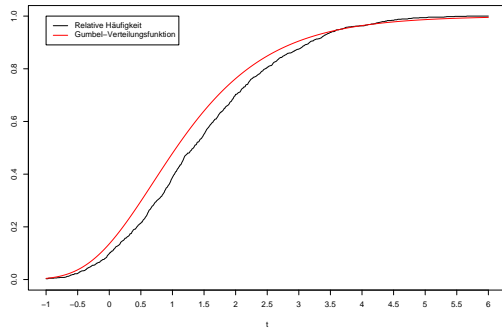


Abbildung 121: T_4^* , erste Komponente, Schätzer von σ^2 , τ^2 für die Nullhypothese, kein Changepoint, $n=1000$.

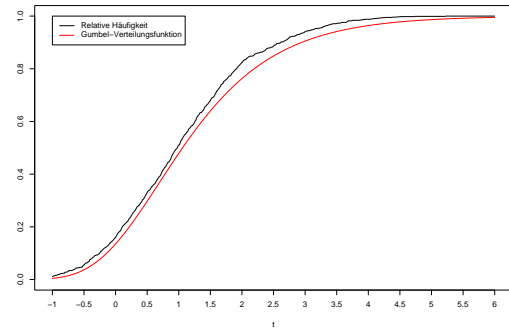


Abbildung 122: T_4^* , zweite Komponente, Schätzer von σ^2 , τ^2 für die Nullhypothese, kein Changepoint, $n=1000$.

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

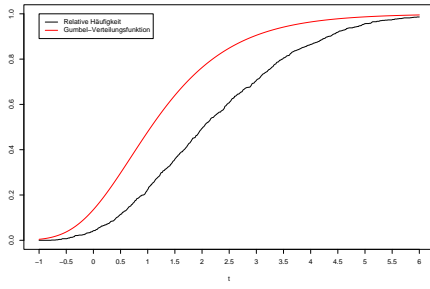


Abbildung 123: T_4^* , erste Komponente, Schätzer von σ^2 , τ^2 für erstes Modell, Change-point in $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=50$, $\delta_1 = (3, 1)'$, $n=100$.

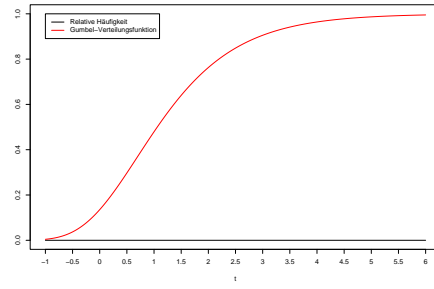


Abbildung 124: T_4^* , zweite Komponente, Schätzer von σ^2 , τ^2 für erstes Modell, Change-point in $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=50$, $\delta_1 = (3, 1)'$, $n=100$.

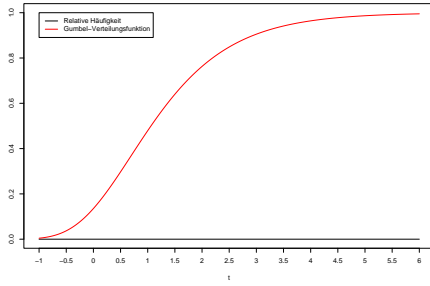


Abbildung 125: T_3^* , Schätzer von σ^2 , τ^2 für erstes Modell, Change-point in $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=50$, $\delta_1 = (3, 1)'$, $n=100$.

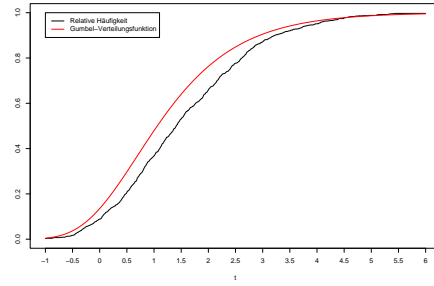


Abbildung 126: T_4^* , erste Komponente, Schätzer von σ^2 , τ^2 für erstes Modell, Change-point in $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=10$, $\delta_1 = (3, 1)'$, $n=100$.

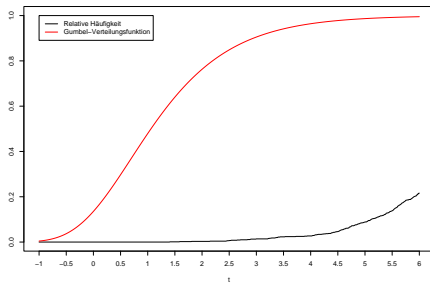


Abbildung 127: T_4^* , zweite Komponente, Schätzer von σ^2 , τ^2 für erstes Modell, Change-point in $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=10$, $\delta_1 = (3, 1)'$, $n=100$.

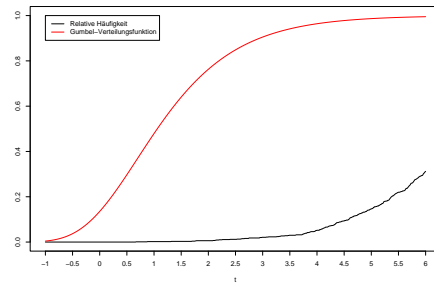


Abbildung 128: T_3^* , Schätzer von σ^2 , τ^2 für erstes Modell, Change-point in $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=10$, $\delta_1 = (3, 1)'$, $n=100$.

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

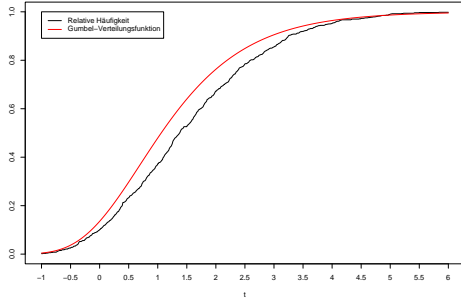


Abbildung 129: T_4^* , erste Komponente, Schätzer von σ^2 , τ^2 für erstes Modell, Changepoint in $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ $k^*=90$, $\delta_1 = (3, 1)'$, $n=100$.

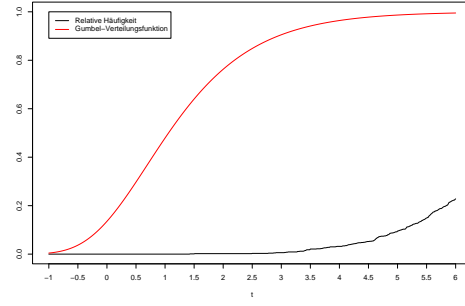


Abbildung 130: T_4^* , zweite Komponente, Schätzer von σ^2 , τ^2 für erstes Modell, Changepoint in $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ $k^*=90$, $\delta_1 = (3, 1)'$, $n=100$.

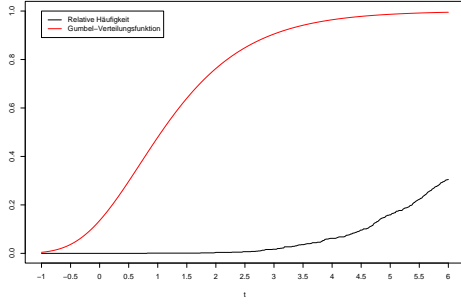


Abbildung 131: T_3^* , Schätzer von σ^2 , τ^2 für erstes Modell, Changepoint in $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=90$, $\delta_1 = (3, 1)'$, $n=100$.

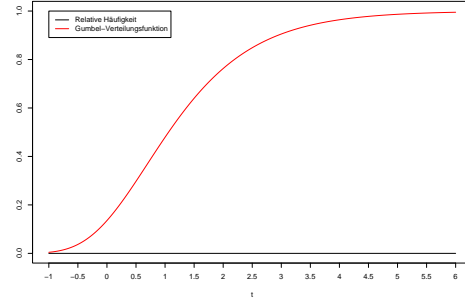


Abbildung 132: T_4^* , erste Komponente, Schätzer von σ^2 , τ^2 für zweites Modell, Changepoint in $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=50$, $\delta_2 = (3, 2)'$, $n=100$.

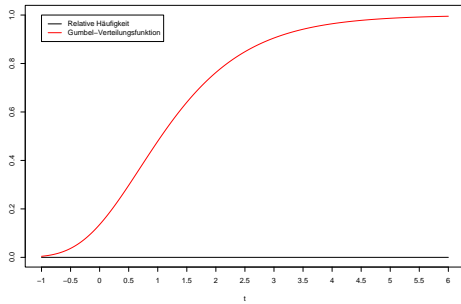


Abbildung 133: T_4 , erste Komponente, Changepoint in $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ $k^*=10$, $\delta_2 = (3, 2)'$, $n=100$.

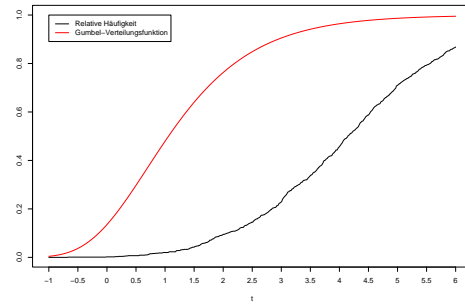


Abbildung 134: T_4 , zweite Komponente, Changepoint in $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=10$, $\delta_2 = (3, 2)'$, $n=100$.

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

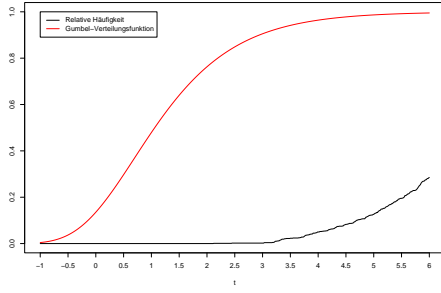


Abbildung 135: T_4^* , zweite Komponente, Schätzer von σ^2, τ^2 für zweites Modell, Change-point in $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=50$, $\delta_2 = (3, 2)'$, $n=100$.

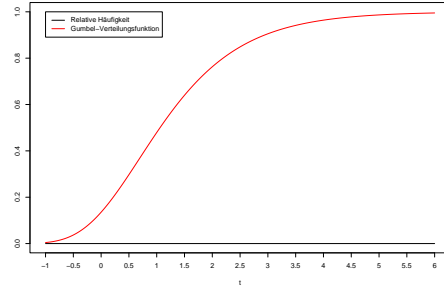


Abbildung 136: T_3^* , Schätzer von σ^2, τ^2 für zweites Modell, Change-point in $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=50$, $\delta_2 = (3, 2)'$, $n=100$.

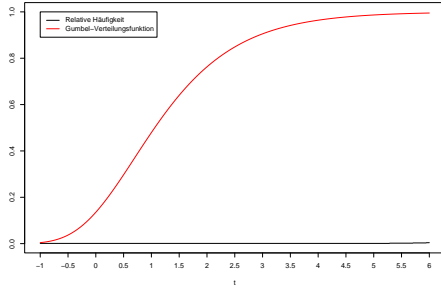


Abbildung 137: T_4^* , erste Komponente, Schätzer von σ^2, τ^2 für zweites Modell, Change-point in $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=10$, $\delta_2 = (3, 2)'$, $n=100$.

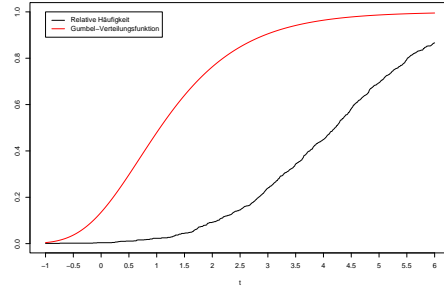


Abbildung 138: T_4^* , zweite Komponente, Schätzer von σ^2, τ^2 für zweites Modell, Change-point in $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=10$, $\delta_2 = (3, 2)'$, $n=100$.

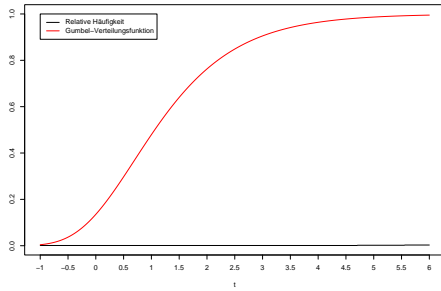


Abbildung 139: T_3^* , Schätzer von σ^2, τ^2 für zweites Modell, Change-point in $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=10$, $\delta_2 = (3, 2)'$, $n=100$.

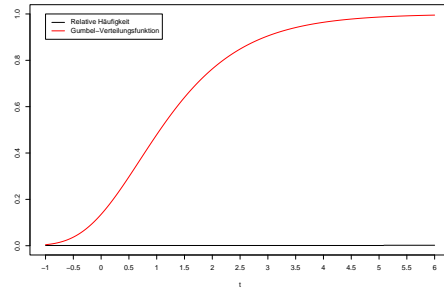


Abbildung 140: T_4^* , erste Komponente, Schätzer von σ^2, τ^2 für zweites Modell, Change-point in $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $k^*=90$, $\delta_2 = (3, 2)'$, $n=100$.

3 A posteriori Changepoint-Analyse für abrupte Changepoints

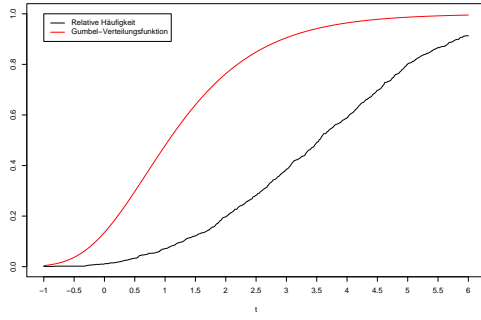


Abbildung 141: T_4^* , zweite Komponente, Schätzer von σ^2 , τ^2 für zweites Modell, Changepoint in $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ $k^*=90$, $\delta_2 = (3, 2)'$, $n=100$.

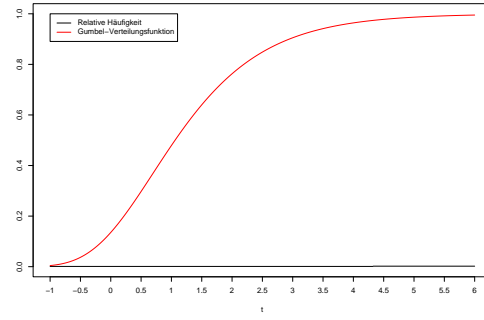


Abbildung 142: T_3^* , Schätzer von σ^2 , τ^2 für zweites Modell, Changepoint in $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ $k^*=90$, $\delta_2 = (3, 2)'$, $n=100$.

In der folgenden Tabelle vergleichen wir die 0.9-, 0.95-, 0.99-Quantile der Gumbel-Verteilung mit den ermittelten relativen Häufigkeiten, für die unter H_0 gilt:

$$a(\log n)T^*(n) \leq t + d_p(\log n),$$

wobei $T^*(n)$ für eine der drei Teststatistiken $T_3^*(n)$, $T_4^*(1, n)$, $T_4^*(2, n)$ steht. Die in die Teststatistiken einfließenden Schätzer für die Varianz der Fehlerprozesse sind die Schätzer aus Abschnitt 3.4.8.1. t wird so gewählt, dass gilt: $\exp(-2 \exp(-t)) = 0.9$ (0.95, 0.99).

t	2.943515	3.663341	5.2933
$\exp(-2 \exp(-t))$	0.9	0.95	0.99
T_3^* , $n=100$	0.891	0.954	0.993
T_4^* , 1. Komp., $n=100$	0.978	0.991	1
T_4^* , 2. Komp., $n=100$	0.991	0.998	1
T_3^* , $n=1000$	0.781	0.9	0.985
T_4^* , 1. Komp., $n=1000$	0.96	0.988	1
T_4^* , 2. Komp., $n=1000$	0.984	0.998	1

3.4.9.4 Schlussfolgerungen aus den Simulationsstudien

Unsere Simulationsstudien bestätigen für den Fall der Nullhypothese die theoretisch hergeleiteten asymptotischen Ergebnisse schon für eine relativ geringe Anzahl von Beobachtungen ($n=100$).

Die Simulationsergebnisse sind insbesondere von den verwendeten Designmatrizen $\{H_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ bzw. $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ und im Falle der Alternative von den Sprunghöhen δ_1 , δ_2 der Fehlerprozesse abhängig. Aufgrund des sehr allgemein formulierten Modells ist es vor der praktischen Anwendung der vorgestellten Teststatistiken T_3^* bzw. T_4^* zur Datenanalyse notwendig, die gegebenen Datenausprägungen eingehend zu analysieren und gegebenenfalls neue Simulationsläufe mit anderen Designmatrizen bzw. Sprunghöhen der Fehlerprozesse zu realisieren.

4 A posteriori Changepoint-Analyse für graduelle Changepoints

4.1 Einführung

Nachdem wir im vorangegangenen Kapitel 3 Changepoint-Modelle für plötzliche (abrupte) Strukturbrüche untersucht haben, betrachten wir nun Changepoint-Modelle für graduelle Veränderungen.

In den vergangenen Jahren wurden einige Arbeiten bezüglich "kontinuierlicher" gradueller Changepoints veröffentlicht (vgl. [Jar98], [Hus98b], [Hus99], [HuSt00], [Ste00]). Die vier erstgenannten Arbeiten beschäftigen sich mit der Untersuchung gradueller Changepoint-Modelle im Falle von unabhängig identisch verteilten Fehlertermen. Steinebach hat in [Ste00] das im Folgenden beschriebene sehr allgemeine Modell untersucht, das insbesondere auch bei korrelierten Fehlerprozessen anwendbar ist.

Sei $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ ein stochastischer (reellwertiger) Prozess folgender Art:

$$Z_t := \begin{cases} at + bY_t & , 0 \leq t \leq T^*, \\ Z_{T^*} + a(t - T^*) + \dot{\delta}(t - T^*)^{1+\gamma} + b^*Y_{t-T^*}^* & , T^* < t \leq T, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

wobei $a, b, b^*, T^*, \dot{\delta} = \dot{\delta}(T)$ unbekannte Parameter, $\gamma > 0$ bekannt und $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ bzw. $\{Y_t^*\}_{t \geq 0}$ (nicht beobachtbare) stochastische Prozesse sind.

Getestet wird die Nullhypothese

$$H_0 : T^* = T$$

gegen die Alternative

$$H_A : 0 < T^* < T, \dot{\delta} \neq 0.$$

In [Ste00] werden Teststatistiken vorgestellt und deren asymptotisches Verhalten unter der Nullhypothese sowie unter der Alternative untersucht.

Eine zentrale Bedingung an den Fehlerprozess $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ ist das folgende Invarianzprinzip:

Für jedes $T \geq 0$ gibt es einen Wiener-Prozess $\{W^{\{T\}}(t)\}_{0 \leq t \leq T^*}$, so dass gilt:

$$\sup_{0 < t \leq T^*} \frac{|Y_{T^*} - Y_{T^*-t} - W^{\{T\}}(t)|}{t^\alpha} = \mathcal{O}_P(1) \quad (T \rightarrow \infty) \quad \text{für ein } \alpha < \frac{1}{2}. \quad (4.1.2)$$

Unter der Alternative spielt darüber hinaus folgende Bedingung eine wichtige Rolle:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t^*| = \mathcal{O}_P\left(T^{\frac{1}{2}}\right) \quad (T \rightarrow \infty). \quad (4.1.3)$$

4.2 A posteriori Changepoint-Analyse in State-Space Modellen für graduelle Changepoints

4.2.1 Modell

Wir betrachten das durch (3.4.1)-(3.4.11) und (3.4.14), (3.4.15) gegebene Modell. (3.4.12) und (3.4.13) ersetzen wir durch folgende (stärkere) Bedingungen:

$$\begin{aligned} &\exists A \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}, \text{ positiv definit, so dass gilt:} \\ &\left\| \frac{1}{k_2 - k_1} \sum_{j=k_1+1}^{k_2} (I_\ell - Q_j)(I_\ell - Q_j)' - A \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o\left((k_2 - k_1)^{-\vartheta}\right) \\ &\text{für } \min(k_1, k_2 - k_1) \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

$$\begin{aligned} &\exists B \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}, \text{ positiv definit, so dass gilt:} \\ &\left\| \frac{1}{k_2 - k_1} \sum_{j=k_1+1}^{k_2} H_j H_j' - B \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o\left((k_2 - k_1)^{-\vartheta}\right) \\ &\text{für } \min(k_1, k_2 - k_1) \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

für ein $\vartheta > 0$.

4.2.2 Changepoint-Modelle

Wir betrachten das durch (3.4.1)-(3.4.6), (3.4.14), (3.4.15), (4.2.1), (4.2.2) gegebene State-Space Modell und definieren analog wie für abrupte Veränderungen (vgl. Abschnitt 3.4.4) die drei folgenden Changepoint-Modelle.

Changepoint-Modell 1

Unser 1. Changepoint-Modell betrachtet Änderungen in der State Equation:

$$\begin{aligned} H_0: \quad & \mathbb{E} \varepsilon_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ & \mathbb{E} \omega_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ \\ H_A^{(1)}: \quad & \exists 1 \leq k^* < n, \delta_1 = \delta_1(n) \in \mathbb{R}^p, \|\delta_1\| \neq 0, \gamma > 0: \\ & \mathbb{E} \omega_i = \left(\frac{i - k^*}{n} \right)_+^\gamma \delta_1 \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ & \mathbb{E} \varepsilon_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Changepoint-Modell 2

Im 2. Modell betrachten wir Änderungen in der Observation Equation:

$$H_0: \quad \begin{aligned} E \varepsilon_i &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ E \omega_i &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

$$H_A^{(2)}: \quad \begin{aligned} &\exists 1 \leq k^* < n, \delta_2 = \delta_2(n) \in \mathbb{R}^\ell, \|\delta_2\| \neq 0, \gamma > 0 : \\ E \varepsilon_i &= \left(\frac{i - k^*}{n} \right)_+^\gamma \delta_2 \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ E \omega_i &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Changepoint-Modell 3

Im 3. Modell lassen wir simultane Änderungen in der Observation Equation und der State Equation zu:

$$H_0: \quad \begin{aligned} E \varepsilon_i &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ E \omega_i &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

$$H_A^{(3)}: \quad \begin{aligned} &\exists 1 \leq k^* < n, \delta_1 = \delta_1(n) \in \mathbb{R}^p, \delta_2 = \delta_2(n) \in \mathbb{R}^\ell, \|\delta_1\|, \|\delta_2\| \\ &\text{nicht beide } 0, \gamma > 0 : \\ E \omega_i &= \left(\frac{i - k^*}{n} \right)_+^\gamma \delta_1 \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ E \varepsilon_i &= \left(\frac{i - k^*}{n} \right)_+^\gamma \delta_2 \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

4.2.3 Konstruktion einer Teststatistik

Wie in Abschnitt 3.4.5 setzen wir im Weiteren voraus, dass gilt:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (I_\ell + Q_j)(I_\ell + Q_j)', \quad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n H_j H_j' \text{ } P\text{-f.s. positiv definit,} \quad (4.2.3)$$

sowie dass

$$\sigma^2, \tau^2 \text{ nicht beide verschwinden,} \quad (4.2.4)$$

bzw. dass

$$\hat{\sigma}_n^2, \hat{\tau}_n^2 \text{ nicht beide verschwinden.} \quad (4.2.5)$$

$D_n, \hat{D}_n, C_n, \hat{C}_n, M$ seien wie in Abschnitt 3.4.5 definiert.

Bemerkung 4.1. *Unter (4.2.1)-(4.2.4) gilt mit den obigen Bezeichnungen:*

$$\|D_n^{-1} - M^{-1}\| \stackrel{P\text{-f.s.}}{=} o\left(n^{-\frac{\vartheta}{2}}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Beweis: Vgl. Beweis von Bemerkung 3.39. □

Bemerkung 4.2. Es gelte (4.2.1)-(4.2.5) sowie

$$|\sigma^2 - \hat{\sigma}_n^2| = o_P(f(n)) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (4.2.6)$$

$$|\tau^2 - \hat{\tau}_n^2| = o_P(f(n)) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (4.2.7)$$

für ein $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = \mathcal{O}(1)$.

Dann folgt:

$$\|\hat{D}_n^{-1} - M^{-1}\| = o_P\left(\sqrt{f(n)} + n^{-\frac{\vartheta}{2}}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Beweis: Vgl. Beweis von Bemerkung 3.40. □

Zur Konstruktion einer Teststatistik verwenden wir die in Abschnitt 3.4.5 definierten Δ_i . Dabei definieren wir die Teststatistik komponentenweise:

$$T_5(j, n) := \max_{1 \leq k < n} \left| \left(M^{-1} \frac{\sum_{i=1}^k (i-k)_+^\gamma (\Delta_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i)}{\left(\frac{(n-k)^{2\gamma+1}}{2\gamma+1} - \frac{1}{n} \frac{(n-k)^{2\gamma+2}}{(\gamma+1)^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \right)^{(j)} \right|,$$

$$T_5^*(j, n) := \max_{1 \leq k < n} \left| \left(\hat{D}_n^{-1} \frac{\sum_{i=1}^k (i-k)_+^\gamma (\Delta_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i)}{\left(\frac{(n-k)^{2\gamma+1}}{2\gamma+1} - \frac{1}{n} \frac{(n-k)^{2\gamma+2}}{(\gamma+1)^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \right)^{(j)} \right|.$$

Eine zentrale Rolle bei der Bestimmung asymptotischer Eigenschaften der vorgestellten Teststatistik spielt das folgende Invarianzprinzip.

Theorem 4.1. Es sei das durch (3.4.1)-(3.4.11), (3.4.14), (3.4.15), (4.2.1)-(4.2.4) definierte State-Space Modell unter H_0 gegeben. Dann gilt:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Folge i.i.d. normalverteilter zentrierter Zufallsvektoren $\{X_i^{\{n\}}\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit Kovarianzmatrix $\text{Cov } X_1^{\{n\}} := \sigma^2 A + \tau^2 B$, so dass gilt:

$$\left\| \sum_{i=k+1}^n \Delta_i - \sum_{i=k+1}^n X_i^{\{n\}} \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o\left((n-k)^{\frac{1}{2}-\lambda}\right) \quad (n-k \rightarrow \infty) \quad (4.2.8)$$

für ein $\lambda > 0$.

Beweis: Der Beweis von Theorem 4.1 beruht auf einer Anwendung von Theorem 2.5. Wir betrachten analog zum Beweis von Theorem 3.11:

$$\sum_{i=k+1}^n \Delta_i = -Q_{k+1} \varepsilon_k + \varepsilon_n + \sum_{i=k+1}^n H_j \omega_j + \sum_{i=k+2}^{n-1} (I_\ell - Q_i) \varepsilon_{i-1}. \quad (4.2.9)$$

Gelte zunächst: $\sigma^2, \tau^2 \neq 0$.

Analog zum Beweis von Theorem 3.11 zeigt man:

$$\max_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \|H_i \omega_i\|^{2+\delta} \leq \text{const}_{24} \mathbb{E} (\|H_i \omega_i\|^2)^{\frac{2+\delta}{2}} \quad (4.2.10)$$

für eine Konstante const_{24} .

Weiter folgt mit dem Satz von Beppo Levi, (3.4.5), (3.4.15), (4.2.2) für $\min(k_1, k_2 - k_1) \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{k_2 - k_1} \text{Cov} \sum_{i=k_1+1}^{k_2} H_i \omega_j = \tau^2 B + o\left((k_2 - k_1)^{-\vartheta}\right). \quad (4.2.11)$$

Mit Theorem 2.5 folgt wegen (4.2.10) und (4.2.11):

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Folge i.i.d. normalverteilter zentrierter Zufallsvektoren $\{\bar{X}_i^{\{n\}}\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit Kovarianzmatrix $\text{Cov} \bar{X}_1^{\{n\}} := \tau^2 B$, so dass gilt:

$$\left\| \sum_{i=k+1}^n H_i \omega_i - \sum_{i=k+1}^n \bar{X}_i^{\{n\}} \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o\left((n - k)^{\frac{1}{2} - \lambda_1}\right) \quad (n - k \rightarrow \infty) \quad (4.2.12)$$

für ein $\lambda_1 > 0$.

Analog erhalten wir:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Folge i.i.d. normalverteilter zentrierter Zufallsvektoren $\{\tilde{X}_i^{\{n\}}\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit Kovarianzmatrix $\text{Cov} \tilde{X}_1^{\{n\}} := \sigma^2 A$, so dass gilt:

$$\left\| \sum_{i=k+2}^{n-1} (I_\ell - Q_i) \varepsilon_{i-1} - \sum_{i=k+2}^{n-1} \tilde{X}_i^{\{n\}} \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o\left((n - k)^{\frac{1}{2} - \lambda_2}\right) \quad (n - k \rightarrow \infty) \quad (4.2.13)$$

für ein $\lambda_2 > 0$.

(4.2.8) folgt aus (4.2.9), (4.2.12), (4.2.13).

Gilt $\sigma^2 = 0$, $\tau^2 \neq 0$, so folgt wegen der Zentriertheit von $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$:

$$\varepsilon_i \stackrel{P-f.s.}{=} 0. \quad (4.2.14)$$

Wie oben folgt (4.2.13).

Aus (3.4.24), (4.2.13), (4.2.14) folgt (4.2.8).

Der Fall $\sigma^2 \neq 0$, $\tau^2 = 0$ folgt analog. □

4.2.4 Asymptotisches Verhalten der Teststatistik

Theorem 4.2. *Es sei das durch (3.4.1)-(3.4.6), (3.4.14), (3.4.15), (4.2.1)-(4.2.4) definierte State-Space Modell unter H_0 gegeben. Dann gilt für $1 \leq j \leq \ell$:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(a(n)T_5(j, n) - b(n) \leq t) = \exp(-2 \exp(-t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4.2.15)$$

Dabei sei

$$a(n) := (2 \log \log n)^{\frac{1}{2}},$$

für $\gamma > \frac{1}{2}$:

$$b(n) := 2 \log \log n + \log \left(\frac{1}{4\pi} \left(\frac{2\gamma + 1}{2\gamma - 1} \right)^{\frac{1}{2}} \right),$$

für $\gamma = \frac{1}{2}$:

$$b(n) := 2 \log \log n + \frac{1}{2} \log \log \log \log n - \log 4\pi,$$

für $0 < \gamma < \frac{1}{2}$:

$$b(n) := 2 \log \log n + \frac{1 - 2\gamma}{2(2\gamma + 1)} \log \log \log n - \log \left(\frac{C_\gamma^{\frac{1}{2\gamma+1}} H_{2\gamma+1}}{\pi^{\frac{1}{2}} 2^{2\gamma+1}} \right),$$

wobei $H_{2\gamma+1}$ wie in Bemerkung 12.2.10 in [LeLiRo83] gewählt sei und

$$C_\gamma = -(2\gamma + 1) \int_0^\infty y^\gamma ((y+1)^\gamma - y^\gamma - \gamma y^{\gamma-1}) dy.$$

Beweis: Der Beweis von Theorem 4.2 ist eine Anwendung von Theorem 2.1. aus [Ste00].

Sei für $j = 1 \leq j \leq \ell$:

$$Z(t) = Z(t, j) := \left(M^{-1} \sum_{i=1}^{[t]} \Delta_i \right)^{(j)},$$

$$Y(t) = Y(t, j) := Z(t, j),$$

$$a := 0, b := 1, T^* := T, \alpha := \frac{1}{2} - \lambda \text{ (} \lambda \text{ aus Theorem 4.1).}$$

Mit Theorem 4.1 und Lemma 7.7 folgt:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Folge i.i.d. normalverteilter zentrierter Zufallsvektoren $\{X_i^{\{n\}}\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit Kovarianzmatrix $\text{Cov } X_1^{\{n\}} := \sigma^2 A + \tau^2 B$, so dass gilt:

$$\max_{1 \leq k \leq n} \frac{\left\| \sum_{i=k+1}^n \Delta_i - \sum_{i=k+1}^n X_i^{\{n\}} \right\|}{(n-k)^\alpha} \stackrel{P-f.s.}{=} o(1) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (4.2.16)$$

mit $\alpha < \frac{1}{2}$.

Aus (4.2.16) folgt (4.1.2). Mit Theorem 2.1 aus [Ste00] folgt (4.2.15). \square

Bemerkung 4.3. $T_5(j, n)$ kann in Theorem 4.2 durch $T_5^*(j, n)$ ersetzt werden, falls (4.2.5) gilt sowie

$$|\sigma^2 - \hat{\sigma}_n^2| = o_P \left(\frac{1}{(\log \log n)^2} \right) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (4.2.17)$$

$$|\tau^2 - \hat{\tau}_n^2| = o_P \left(\frac{1}{(\log \log n)^2} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (4.2.18)$$

Beweis: Folgt aus Theorem 4.2 mit Bemerkung 4.2. \square

Wir betrachten das Verhalten der Teststatistik $T_5(n)$ unter der Alternative $H_A^{(3)}$, die die Alternativen $H_A^{(1)}$ sowie $H_A^{(2)}$ beinhaltet.

Theorem 4.3. *Es sei das durch (3.4.1)-(3.4.6), (3.4.14), (3.4.15), (4.2.1)-(4.2.4) definierte State-Space Modell unter $H_A^{(3)}$ gegeben. Sei $1 \leq j \leq \ell$.*

Weiter gelte (4.2.3), (4.2.4) sowie

$$\min(k^*, n - k^*) \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty), \quad (4.2.19)$$

$\exists \bar{\delta}_j = \bar{\delta}_j(n) \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq m \leq n-k^*} \left| \sum_{i=k^*+1}^{k^*+m} (H_i \delta_1 + (I_\ell - Q_i) \delta_2)^{(j)} \left(\frac{i - k^*}{n} \right)^\gamma - \sum_{i=k^*+1}^{k^*+m} \bar{\delta}_j \left(\frac{i - k^*}{n} \right)^\gamma \right| \\ &= \mathcal{O}_P \left((n - k^*)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

$$\left| \frac{\bar{\delta}_j n^{\gamma+\frac{1}{2}} \left(\frac{n-k^*}{n} \right)^{\gamma+\frac{1}{2}}}{(\log \log n)^{\frac{1}{2}}} \right| \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty). \quad (4.2.21)$$

Dann folgt:

$$a(n)T_5(j, n) - b(n) \xrightarrow{P} \infty \quad (n \rightarrow \infty), \quad (4.2.22)$$

wobei $a(n)$, $b(n)$ wie in Theorem 4.2 definiert sind.

Beweis: Sei für $j = 1, \dots, \ell$

$$Z(t) = Z(t, j) := \left(M^{-1} \sum_{i=1}^{[t]} \Delta_i \right)^{(j)},$$

$$Y(t) = Y(t, j) := Z(t, j),$$

$$\begin{aligned} Y^*(t - T^*) &:= Z(t) - Z(T^*) - \frac{\bar{\delta}_j}{(\gamma + 1)[T]^\gamma} (t - T^*)^{\gamma+1} \\ &\quad - \sum_{i=k^*+1}^{k^*+[t-T^*]} (H_i \delta_1 + (I_\ell - Q_i) \delta_2)^{(j)} \left(\frac{i - k^*}{n} \right)^\gamma \\ &\quad + \sum_{i=k^*+1}^{k^*+[t-T^*]} \bar{\delta}_j([T]) \left(\frac{i - k^*}{n} \right)^\gamma, \end{aligned}$$

Dann gilt mit $\alpha = \frac{1}{2+\delta}$, $a = 0$, $b = b^* = 1$, $T^* = [k^*]$ (4.1.3) (vgl. Beispiel 1 in [Ste00]). Mit Theorem 4.1 folgt wegen $k^* \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) analog wie im Beweis zu Theorem 4.2 (4.1.2). Mit den Ergebnissen aus Kapitel 4 in [Ste00] folgt (4.2.22). \square

Bemerkung 4.4. *In Theorem (4.3) kann $T_5(j, n)$ durch $T_5^*(j, n)$ ersetzt werden, falls (4.2.5) gilt sowie*

$$\begin{aligned} |\sigma^2 - \hat{\sigma}_n^2| &= o_P(1) \quad (n \rightarrow \infty), \\ |\tau^2 - \hat{\tau}_n^2| &= o_P(1) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Beweis: Folgt mit Bemerkung 4.2. \square

4.2.5 Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints

Zur Konzeption von Schätzern für den Zeitpunkt des Changepoints wenden wir ein Ergebnis an, das Aue und Steinebach in [AuSt02] herleiten. Für das in [Ste00] betrachtete allgemeine Modell wird ein Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints vorgestellt und asymptotisch untersucht. Analog, wie wir im vorangegangenen Abschnitt die Ergebnisse von Steinebach aus [Ste00] bezüglich des asymptotischen Verhaltens von Teststatistiken auf State-Space Modelle übertragen haben, lassen sich auch die Ergebnisse von Aue und Steinebach für unsere Problemstellung verwenden. Wir betrachten zunächst einen komponentenweisen Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints:

$$\hat{k}_j := \inf \left\{ k \left| \frac{\left| \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{i-k}{n} \right)_+^\gamma - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-k}{n} \right)_+^\gamma \right) \Delta_i^{(j)} \right|}{\left(\sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{i-k}{n} \right)_+^\gamma - \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-k}{n} \right)_+^\gamma \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right| \right\} \\ = \max_{1 \leq k < n} \left\{ \frac{\left| \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{i-k}{n} \right)_+^\gamma - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-k}{n} \right)_+^\gamma \right) \Delta_i^{(j)} \right|}{\left(\sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{i-k}{n} \right)_+^\gamma - \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-k}{n} \right)_+^\gamma \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right\} \quad (1 \leq j \leq \ell).$$

Unter der Alternative $H_A^{(3)}$ erhalten wir den folgenden Zusammenhang.

Theorem 4.4. *Es sei das durch (3.4.1)-(3.4.6), (3.4.14), (3.4.15), (4.2.1)-(4.2.4) definierte State-Space Modell unter $H_A^{(3)}$ gegeben, $1 \leq j \leq \ell$. Es gelte:*

$$k^* = [n\tau] \text{ für ein } \tau \in (0, 1), \quad (4.2.23)$$

$\exists \bar{\delta}_j = \bar{\delta}_j(n) \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$\max_{1 \leq m \leq n-k^*} \left| \left(\sum_{i=k^*+1}^{k^*+m} (H_i \delta_1 + (I_\ell - Q_i) \delta_2)^{(j)} \left(\frac{i-k^*}{n} \right)^\gamma - \sum_{i=k^*+1}^{k^*+m} \bar{\delta}_j \left(\frac{i-k^*}{n} \right)^\gamma \right) \right| \\ = \mathcal{O}_P \left(n^{\frac{1}{2}} \right) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (4.2.24)$$

$$\left| \frac{\bar{\delta}_j n^{\gamma+\frac{1}{2}}}{(\log \log n)^{\frac{1}{2}}} \right| \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty), \quad (4.2.25)$$

$$\bar{\delta}_j \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (4.2.26)$$

Dann folgt:

Für $\gamma < \frac{1}{2}$:

$$\left| \hat{k}_j - k^* \right| = \mathcal{O}_P \left(\bar{\delta}_j^{\frac{-2}{2\gamma+1}} \right) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (4.2.27)$$

für $\gamma = \frac{1}{2}$:

$$\left| \hat{k}_j - k^* \right| = \mathcal{O}_P \left(\frac{1}{\bar{\delta}_j (\log(n - k^*))^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (4.2.28)$$

für $\frac{1}{2} < \gamma < 1$:

$$\left| \hat{k}_j - k^* \right| = \mathcal{O}_P \left(\frac{1}{\bar{\delta}_j n^{\gamma - \frac{1}{2}}} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (4.2.29)$$

Beweis: Analog zum Beweis von Theorem 4.3 zeigt man die Gültigkeit von (4.1.2) sowie (4.1.3). Mit den Ergebnissen von Aue und Steinebach (vgl. [AuSt02], Kapitel 2) erhalten wir die Aussagen von Theorem 4.4. \square

Wir betrachten nun einen Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints, der alle Komponenten berücksichtigt:

$$\begin{aligned} \hat{k} &:= \inf \left\{ k \left| \max_{1 \leq j \leq \ell} \frac{\left| \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{i-k}{n} \right)_+^\gamma - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-k}{n} \right)_+^\gamma \right) \Delta_i \right|^{(j)}}{\left(\sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{i-k}{n} \right)_+^\gamma - \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-k}{n} \right)_+^\gamma \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right. \\ &\quad \left. = \max_{1 \leq k < n} \max_{1 \leq j \leq \ell} \frac{\left| \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{i-k}{n} \right)_+^\gamma - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-k}{n} \right)_+^\gamma \right) \Delta_i \right|^{(j)}}{\left(\sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{i-k}{n} \right)_+^\gamma - \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-k}{n} \right)_+^\gamma \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right\}. \end{aligned}$$

Theorem 4.5. *Es sei das durch (3.4.1)-(3.4.6), (3.4.14), (3.4.15), (4.2.1)-(4.2.3) definierte State-Space Modell unter $H_A^{(3)}$ gegeben. (4.2.23) sei erfüllt und für mindestens ein j ($1 \leq j \leq \ell$) gelte:*

$\exists \bar{\delta}_j = \bar{\delta}_j(n) \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} &\max_{1 \leq m \leq n-k^*} \left| \left(\sum_{i=k^*+1}^{k^*+m} (H_i \delta_1 + (I_\ell - Q_i) \delta_2) \left(\frac{i-k^*}{n} \right)^\gamma - \sum_{i=k^*+1}^{k^*+m} \bar{\delta}_j \left(\frac{i-k^*}{n} \right)^\gamma \right)^{(j)} \right| \\ &= \mathcal{O}_P \left(n^{\frac{1}{2}} \right) \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

$$\left| \frac{\bar{\delta}_j n^{\gamma + \frac{1}{2}}}{(\log \log n)^{\frac{1}{2}}} \right| \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty), \quad (4.2.31)$$

$$\bar{\delta}_j \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (4.2.32)$$

Für alle j ($1 \leq j \leq \ell$), für die (4.2.30)-(4.2.32) nicht erfüllt sind, gelte:

$$\max_{1 \leq m \leq n-k^*} \left| \sum_{i=k^*+1}^{k^*+m} (H_i \delta_1 + (I_\ell - Q_i) \delta_2)^{(j)} \left(\frac{i-k^*}{n} \right)^\gamma \right| = \mathcal{O}_P \left(n^{\frac{1}{2}} \right). \quad (4.2.33)$$

Dann folgt für alle j ($1 \leq j \leq \ell$), für die (4.2.30)-(4.2.32) gilt:

Für $\gamma < \frac{1}{2}$:

$$\left| \hat{k} - k^* \right| = \mathcal{O}_P \left(\bar{\delta}_j^{\frac{-2}{2\gamma+1}} \right) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (4.2.34)$$

für $\gamma = \frac{1}{2}$:

$$\left| \hat{k} - k^* \right| = \mathcal{O}_P \left(\frac{1}{\bar{\delta}_j (\log(n - k^*))^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (4.2.35)$$

für $\frac{1}{2} < \gamma < 1$:

$$\left| \hat{k} - k^* \right| = \mathcal{O}_P \left(\frac{1}{\bar{\delta}_j n^{\gamma - \frac{1}{2}}} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (4.2.36)$$

Beweis: Folgt analog zu Theorem 4.4 mit den Ergebnissen aus [AuSt02]. \square

4.2.6 Varianzschätzer

Als Varianzschätzer wählen wir die in Abschnitt 3.4.8.4 vorgestellten Varianzschätzer für σ^2 bzw. τ^2 , in die nur die Beobachtungen bis zum geschätzten Zeitpunkt des Changepoints einfließen:

$$\hat{\sigma}_n^2 := -\frac{1}{\hat{k} - 2} \sum_{i=3}^{\hat{k}} \frac{\Delta'_i Q_i \Delta_{i-1}}{\text{Sp}(Q'_i Q_i)}, \quad (4.2.37)$$

$$\hat{\tau}_n^2 := \hat{\zeta}_n^2 - \frac{1}{\hat{k} - 1} \sum_{i=2}^{\hat{k}} \frac{\ell + \text{Sp}(Q'_i Q_i)}{\text{Sp}(H'_i H_i)} \hat{\sigma}_n^2, \quad (4.2.38)$$

$$\text{wobei } \hat{\zeta}_n^2 := \frac{1}{\hat{k} - 1} \sum_{i=2}^{\hat{k}} \frac{\Delta'_i \Delta_i}{\text{Sp}(H'_i H_i)}. \quad (4.2.39)$$

\hat{k} ($1 \leq \hat{k} < n$) sei dabei ein Schätzer für den Zeitpunkt des Changepoints.

Für den Fall der Nullhypothese gelten Theorem 3.21 sowie Bemerkung 3.48. Für den Fall der Alternative $H_A^{(3)}$, die die Alternativen $H_A^{(1)}$, $H_A^{(2)}$ beinhaltet, erhalten wir Theorem 3.22. Die Beweise verlaufen völlig analog wie in Abschnitt 3.4.8.4.

Bemerkung 4.5. Analog wie in Abschnitt 3.4.8 ist es möglich, unter $H_A^{(1)}$ bzw. $H_A^{(2)}$ die Sprunghöhen im Changepoint δ_1 bzw. δ_2 zu schätzen und damit Varianzschätzer zu konzipieren.

5 Sequentielle Changepoint-Analyse

In diesem Kapitel stellen wir praxisbezogene Verfahren der sequentiellen Changepoint-Analyse vor und setzen diese auf die in der vorliegenden Dissertation diskutierten linearen Modelle und State-Space Modelle um. Die Verfahren zur sequentiellen Changepoint-Analyse in linearen Modellen werden in [Gie02a] auf Realdaten der Deutschen Telekom angewendet. Wir verzichten auf die Durchführung von Simulationen und verweisen auf zahlreiche Simulationsstudien, die zur sequentiellen Changepoint-Analyse durchgeführt worden sind (Literaturverweise s. unten). Je nach Problemstellung kann es notwendig sein, vor Anwendung der Verfahren auf Realdaten projektbezogene Simulationsstudien durchzuführen.

5.1 Grundlagen der sequentiellen Changepoint-Analyse

Wir betrachten folgendes Modell:

Sei $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, so dass gilt:

$$X_i := \mu_i + \varepsilon_i \quad (i \in \mathbb{N}), \quad (5.1.1)$$

wobei die $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge zentrierter Zufallsvariablen mit $\text{Var } \varepsilon_i = \sigma^2 (< \infty)$ und $\mu_i \in \mathbb{R}$ ($i \in \mathbb{N}$) Konstanten sind.

Getestet wird die Hypothese

$$H_0 : a := \mu_1 = \mu_2 = \dots$$

gegen die Alternative

$$H_A : \exists k^* \in \mathbb{N}, \delta \neq 0 : a := \mu_1 = \dots = \mu_{k^*} \neq a + \delta = \mu_{k^*+1} = \dots$$

Bemerkung 5.1. Schmid betrachtet in [Sch97] ein sehr allgemeines Modell der folgenden Form:

$$X_i := \mu + \varepsilon_i + f(i), \quad (5.1.2)$$

wobei $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge zentrierter Zufallsvariablen mit $\text{Var } \varepsilon_i = \sigma^2 (< \infty)$ ist, $\mu \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Durch ein solches Modell läßt sich eine Vielzahl von Changepoint-Modellen darstellen. Neben abrupten Changepoints (wähle $f(i) := \delta \mathbb{I}_{\{i > k^*\}}$) lassen sich auch graduelle Veränderungen darstellen.

Die in dieser Arbeit angewendeten sequentiellen Teststatistiken kommen aus dem Bereich der Kontrollkarten, die ihre Ursprünge in der Statistischen Prozesskontrolle haben. Die wichtigsten und hier diskutierten sind die Shewhart Kontrollkarte, die CUSUM Kontrollkarte sowie die EWMA Kontrollkarte. Neben Kontrollkarten gibt es eine Reihe weiterer Ansätze zur sequentiellen Changepoint-Analyse, z.B. über sequentielle Ränge (vgl. z.B. [CsHo97]: Abschnitt 2.7, [Hus93], [Hus98a], [GoSe77], [Lom87], [Bro93]). Eine andere Möglichkeit ist die Anwendung von Likelihood-Quotiententests (vgl. z.B. [Bro93]: Abschnitt 2.2). Wir beschränken uns hier auf die oben angeführten Kontrollkarten, weil diese vergleichsweise einfach zu handhaben und umzusetzen sind. Sie sind deshalb für praktische Anwendungen sehr gut geeignet.

5.1.1 Shewhart Chart

Shewhart beschreibt in [She31] seine berühmte, heute noch häufig in der Praxis angewandte Kontrollkarte. Die Shewhart Kontrollkarte ist wie folgt definiert:

$$T_S(n) := X_n - a.$$

Ein Alarm wird ausgelöst, sobald

$$|T_S(n)| > c t_n,$$

wobei a der Erwartungswert von X_1 , t_n die Standardabweichung von $T_S(n)$ und $c > 0$ ein kritischer Wert ist.

Bemerkung 5.2. *Der Shewhart Chart wird als "gedächtnislos" bezeichnet, da unabhängig von allen vergangenen Daten nur die aktuelle Beobachtung in die Teststatistik einbezogen wird.*

Bemerkung 5.3. *Für den Shewhart Chart gilt: $t_n = \sqrt{\sigma^2}$.*

5.1.2 CUSUM Chart

Die CUSUM Kontrollkarte (CUSUM="CUmulative SUM") wird zuerst von Page in [Pag54] vorgestellt. Im Gegensatz zur Shewhart Kontrollkarte besitzt die CUSUM Kontrollkarte ein "vollkommenes" Gedächtnis. Sämtliche vergangenen Beobachtungen fließen mit gleichem Gewicht in die Teststatistik ein:

$$T_C(n) = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n (X_i - a).$$

Ein Alarm wird ausgelöst, sobald

$$|T_C(n)| > c t_n,$$

wobei a der Erwartungswert von X_1 , t_n die Standardabweichung von $T_C(n)$ und $c > 0$ ein kritischer Wert ist.

Bemerkung 5.4. *Ist $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen, so gilt für die Standardabweichung von $T_C(n)$:*

$$t_n = \sqrt{\sigma^2}.$$

Bemerkung 5.5. *Ist $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine stationäre Folge mit Autokovarianzfunktion γ , so gilt für die Standardabweichung von $T_C(n)$:*

$$t_n = \sqrt{\sigma^2 + \frac{2}{n} \sum_{h=1}^{n-1} \gamma(h)}.$$

5.1.3 EWMA Chart

Der EWMA Chart (EWMA=„Exponentially Weighted Moving Average“) wird zuerst von Roberts in [Rob59] vorgestellt. Er nimmt eine Mittelstellung zwischen CUSUM Chart und EWMA Chart ein. Wie beim CUSUM Chart zieht man auch hier zur Realisierung der Teststatistik sämtliche vergangenen Beobachtungen heran. Allerdings fließen diese mit unterschiedlicher Gewichtung ein. Weiter zurückliegende Beobachtungen erhalten ein geringeres Gewicht. Die EWMA Kontrollkarte ist wie folgt definiert:

$$T_E(n) = (1 - \lambda)T_E(n - 1) + \lambda(X_n - a), \quad \lambda \in (0, 1].$$

Damit ist äquivalent:

$$T_E(n) = (1 - \lambda)^n (s_0 - a) + \lambda \sum_{j=0}^{n-1} (1 - \lambda)^j (X_{n-j} - a), \quad \lambda \in (0, 1], \quad (5.1.3)$$

wobei $s_0 := T_E(0)$ ein Startwert für den EWMA Chart ist.

Wir wählen im Folgenden:

$$s_0 = a := E X_1.$$

Ein Alarm wird ausgelöst, sobald

$$|T_E(n)| > c t_n,$$

wobei t_n die Standardabweichung von $T_E(n)$ und $c > 0$ ein kritischer Wert ist.

Bemerkung 5.6. Für eine stationäre Folge $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit Autokovarianzfunktion γ gilt:

$$\begin{aligned} t_n &= \lambda \sqrt{\sigma^2 \frac{1 - (1 - \lambda)^{2n}}{1 - (1 - \lambda)^2} + 2 \sum_{h=1}^{n-1} \gamma(h) \frac{1 - (1 - \lambda)^{2(n-h)}}{1 - (1 - \lambda)^2} (1 - \lambda)^h} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{\sigma^2 \frac{\lambda}{2 - \lambda} + 2 \sum_{h=1}^{\infty} \gamma(h)}. \end{aligned}$$

Beweis: (vgl. [Sch97], Theorem 2.1.)

$$\begin{aligned} t_n &= \lambda \sqrt{\sigma^2 \sum_{j=0}^{n-1} (1 - \lambda)^{2j} + 2 \sum_{h=1}^{n-1} \gamma(h) \sum_{j=0}^{n-h-1} (1 - \lambda)^{2j+h}} \\ &= \lambda \sqrt{\sigma^2 \frac{1 - (1 - \lambda)^{2n}}{1 - (1 - \lambda)^2} + 2 \sum_{h=1}^{n-1} \gamma(h) \frac{1 - (1 - \lambda)^{2(n-h)}}{1 - (1 - \lambda)^2} (1 - \lambda)^h} \\ &= \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} \sigma^2 (1 - (1 - \lambda)^{2n}) + \frac{2\lambda}{2 - \lambda} \sum_{h=1}^{n-1} \gamma(h) (1 - \lambda)^h (1 - (1 - \lambda)^{2(n-h)})} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{\sigma^2 \frac{\lambda}{2 - \lambda} + \frac{2\lambda}{2 - \lambda} \sum_{h=1}^{\infty} \gamma(h) (1 - \lambda)^h}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.7. *Der EWMA Chart wird auch als "Geometric Moving Average" Chart bezeichnet. Den Grund für diese Namensgebung erkennt man an der Darstellung in (5.1.3). Die Gewichte vergangener Beobachtungen nehmen einer geometrischen Folge gehorchend ab.*

5.1.4 Kernel Charts

Ein weiterer Ansatz zur Konzeption von gewichteten Kontrollkarten wird in [ScSt00] vorgestellt. Die Gewichte werden durch Kernfunktionen bestimmt. Bei geeigneter Wahl der Kernfunktion erhält man asymptotisch den EWMA Chart.

5.1.5 Welche Kontrollkarte ist geeignet?

Die Frage, welche Kontrollkarte verwendet werden sollte, ist abhängig von der Zielsetzung. Prinzipiell ist der Shewhart Chart besser geeignet, starke Veränderungen schnell zu erkennen. Der CUSUM Chart erkennt sehr gut geringfügige Veränderungen, allerdings weniger schnell. Darüber hinaus verhält er sich robuster gegenüber "Ausreißern". Der EWMA Chart ist die in der Praxis am häufigsten verwendete Kontrollkarte. Sein Vorteil ist seine Flexibilität. Je nachdem, wie stark vergangene Beobachtungen in die Analysen einfließen sollen, wählt man den Parameter λ . Für $\lambda=1$ erhält man den Shewhart Chart. Läßt man λ gegen 0 konvergieren, so erhält man asymptotisch den CUSUM Chart.

5.1.6 Bestimmung von kritischen Werten

Die geeignete Wahl der in den Teststatistiken auftretenden kritischen Werte hängt von der Zielsetzung der Prüfgröße ab. Ein häufig angewendetes Kriterium ist die mittlere Lauflänge (ARL=Average Run Length), die nach einem Strukturbruch (man spricht dann auch von der mittleren Verzögerungszeit) möglichst klein und für den "In-Control"-Fall (kein Changepoint) möglichst groß sein soll. So kann man als Gütekriterium eine bestimmte ARL vorgeben, die für den Fall, dass kein Changepoint vorliegt, nicht unterschritten werden darf. Der kritische Wert c wird dann minimal gewählt unter der Bedingung, dass die ARL eingehalten wird. Eine andere Möglichkeit besteht darin, eine mittlere Verzögerungszeit vorzugeben, die für den Fall eines Changepoints mit einer vorgegebenen Sprunghöhe δ nicht überschritten werden darf. Der kritische Wert c wird maximal gewählt, unter der Bedingung, dass die mittlere Verzögerungszeit eingehalten wird.

Die Bestimmung mittlerer Lauflängen zur Ermittlung geeigneter kritischer Werte wird häufig mittels Simulationen durchgeführt. Eine weitere Möglichkeit, die mittlere Lauflänge zu bestimmen, besteht in der analytischen Berechnung der ARL. In [Cro87] wird ein Verfahren vorgestellt, das die mittlere Lauflänge für den EWMA Chart mittels einer Fredholmschen Integralgleichung zweiter Art berechnet. Dieses Verfahren ist nur anwendbar, falls die Beobachtungen unabhängig identisch verteilt sind. Im Spezialfall eines Shewhart Charts ist das Verfahren auch für AR(1)-Zeitreihen anwendbar. In [HaKhSc00] werden Vergleichsstudien durchgeführt, die die analytische Berechnung der ARL mit Simulationsergebnissen für den EWMA Chart vergleichen. In den durchgeführten Studien stimmen die analytisch berechnete ARL und die durch Simulationen

ermittelte sehr gut überein. Unter der Voraussetzung, dass die einzelnen Beobachtungen unabhängig identisch normalverteilt sind, lassen sich analog auch die mittleren Lauflängen des CUSUM Charts unter Verwendung einer Fredholmschen Integralgleichung zweiter Art berechnen (vgl. [Wie98]). Schmid hat in [Sch97] Abschätzungen für die ARL des EWMA Charts bei korrelierten Beobachtungen angegeben.

5.2 Korrelierte Beobachtungen

Viele Untersuchungen zur Changepoint-Analyse beschränken sich auf unabhängige Beobachtungen. Allerdings kann von dieser Voraussetzung in praktischen Anwendungen häufig nicht ausgegangen werden. In den vergangenen Jahren wurden einige Untersuchungen bezüglich des Verhaltens von Kontrollkarten für den Fall korrelierter Beobachtungen durchgeführt. Einen guten Überblick zum derzeitigen Forschungsstand mit einer Fülle von Referenzen zu dieser Problemstellung gibt Wieringa in seiner Dissertationsschrift (vgl. [Wie98]).

Es gibt zwei grundsätzlich unterschiedliche Ansätze zum Umgang mit korrelierten Daten bei der Anwendung von Kontrollkarten. Beim ersten Ansatz geht man so vor, dass die beobachteten Daten in der Weise transformiert werden, dass diese unabhängig identisch verteilt sind (vgl. z.B. [AlRo88], [WaMoPl94], [Wie98]). Der zweite Ansatz wendet die Kontrollkarten direkt auf die beobachteten Daten an. Dabei ist zu beachten, dass die Varianz der Kontrollkarten sich im Vergleich zu identisch verteilten Beobachtungen ändert. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von modifizierten Kontrollkarten. Für modifizierte Kontrollkarten sind eine Reihe von Untersuchungen, insbesondere bezüglich des Vergleichs von mittleren Lauflängen der Charts zum identisch verteilten Fall, durchgeführt worden (vgl. [VaSt78], [Sch95], [LuRe97], [AmScFr97], [Sch97], [ScSc97], [Wie98], [ScScKn99]). Ein zentrales Ergebnis ist, dass die Lauflängen der (modifizierten) Kontrollkarten im Falle von positiv korrelierten normalverteilten Beobachtungen länger sind als im i.i.d. Fall (vgl. [Sch95], [Sch97], [ScSc97]).

5.3 Einfluss von Parameterschätzungen

Die Varianz einer Kontrollkarte ist i.A. nicht bekannt. Ähnlich wie bei unseren Untersuchungen zur a posteriori Changepoint-Analyse ist ein geeigneter Schätzer zu bestimmen. Der Zeitpunkt des Changepoints ist bei der sequentiellen Changepoint-Analyse bei den "letzten" Beobachtungen zu suchen. Ein naheliegender Ansatz für die Konzeption eines Varianzschätzers, der diesen Aspekt berücksichtigt, besteht darin, die "letzten" Beobachtungen nicht in den Schätzer einfließen zu lassen. Die übrigen Beobachtungen gehen so in den Varianzschätzer ein, als ob kein Changepoint vorliegt. Ein Kriterium dafür, wieviele Beobachtungen nicht in den Schätzer einfließen, kann die mittlere Verzögerungszeit nach einem Changepoint liefern.

In [KrSc00] sowie [Sch97] wird der Einfluss von Parameterschätzungen, insbesondere der Einfluss von Varianzschätzern, auf den Shewhart Chart bzw. den EWMA Chart untersucht.

5.4 Kontrollkarten für den mehrdimensionalen Fall

Bei den in Abschnitt 3.4 untersuchten State-Space Modellen haben wir mehrdimensionale Beobachtungen betrachtet. Wir beschreiben deshalb kurz mehrdimensionale Verallgemeinerungen der vorgestellten Kontrollkarten. In [Hot47] wird ein mehrdimensionaler Shewhart Chart definiert. In [Cro88] wird ein mehrdimensionaler CUSUM Chart vorgestellt. Kramer und Schmid verallgemeinern den EWMA Chart in [KrSc97] auf den mehrdimensionalen Fall.

Wir betrachten das folgende mehrdimensionale Modell:

Sei X_1, X_2, \dots eine Folge p -dimensionaler Zufallsvektoren, so dass gilt:

$$X_i := \mu_i + \varepsilon_i, \quad (5.4.1)$$

wobei $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge p -dimensionaler zentrierter Zufallsvektoren mit $\text{Cov } \varepsilon_i = \Gamma$ und $\mu_i \in \mathbb{R}^p$ ($i \in \mathbb{N}$). Γ sei positiv definit.

Getestet wird die Hypothese

$$H_0 : a := \mu_1 = \mu_2 = \dots$$

gegen die Alternative

$$H_A : \exists k^*, \dot{\delta} \in \mathbb{R}^p, \|\dot{\delta}\| \neq 0 : a := \mu_1 = \dots = \mu_{k^*} \neq a + \dot{\delta} = \mu_{k^*+1} = \dots$$

5.4.1 Mehrdimensionaler Shewhart Chart

Wir definieren den mehrdimensionalen Shewhart Chart wie folgt:

$$T_{SM}(n) := (X_n - a)' \Gamma^{-1} (X_n - a),$$

wobei Γ die Kovarianzmatrix von X_1 und $a = E X_1$ ist.

Ein Alarm wird ausgelöst, sobald

$$T_{SM}(n) > c,$$

wobei c ein kritischer Wert ist.

5.4.2 Mehrdimensionaler CUSUM Chart

Den mehrdimensionalen CUSUM Chart können wir wie folgt definieren:

$$T_{CM}(n) = \left(\sum_{i=1}^n (X_i - a) \right)' \Gamma_n^{-1} \left(\sum_{i=1}^n (X_i - a) \right),$$

wobei Γ_n die Kovarianzmatrix von $\sum_{i=1}^n X_i$ und $a = E X_1$ ist.

Ein Alarm wird ausgelöst, sobald

$$T_{CM}(n) > c,$$

wobei c ein kritischer Wert ist.

5.4.3 Mehrdimensionaler EWMA Chart

In [KrSc97] werden mehrdimensionale EWMA Kontrollkarten beschrieben.

$$\begin{aligned} \text{Sei } Z_n &:= (I_p - R)Z_{n-1} + RX_n \\ &= Z_{n-1} + R(X_n - Z_{n-1}), \end{aligned}$$

wobei $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$

Es gilt (vgl. [KrSc97]):

$$Z_n = (I_p - R)^n (s_0 - a) + R \sum_{j=0}^{n-1} (I_p - R)^j (X_{n-j} - a), \quad \lambda \in (0, 1],$$

wobei $s_0 \in \mathbb{R}^p$ ein Startwert für den EWMA Chart sei.

Gewöhnlich wählt man:

$$s_0 = E X_1 =: a.$$

Eine mehrdimensionale EWMA Kontrollkarte definieren wir wie folgt:

$$T_{EM}(n) := Z_n' \Gamma_n^{-1} Z_n,$$

wobei Γ_n die Kovarianzmatrix von Z_n sei (zur Berechnung von Γ_n vgl. [KrSc97]).

Ein Alarm wird ausgelöst, sobald

$$T_{EM}(n) > c,$$

wobei c ein kritischer Wert ist.

5.4.4 Rückführung des mehrdimensionalen auf den eindimensionalen Fall

Bei Anwendung der oben beschriebenen mehrdimensionalen Kontrollkarten ist es notwendig, die jeweilige Kovarianzmatrix zur Normierung des Charts zu invertieren. In praktischen Anwendungen sind die berechneten Kovarianzmatrizen häufig nicht invertierbar. Alternativ bietet sich an, eindimensionale Kontrollkarten auf einzelne Komponenten anzuwenden (vgl. Abschnitt 5.6).

5.5 Sequentielle Changepoint-Analyse in linearen Modellen

In [Gie02a] werden Verfahren der sequentiellen Changepoint-Analyse zur Realisierung von Frühwarnsystemen für Realdaten der Deutschen Telekom auf linearen Modellen umgesetzt.

5.6 Sequentielle Changepoint-Analyse in State-Space Modellen

In diesem Abschnitt stellen wir Ansätze vor, Kontrollkarten auf State-Space Modelle anzuwenden. Wir betrachten dabei im gesamten Abschnitt stets, wenn nichts anderes

gesagt, das durch (3.4.1), (3.4.2), (3.4.5), (3.4.14), (3.4.15) definierte State-Space Modell mit deterministischen Matrizenfolgen $\{H_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $\{G_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$.

Zur sequentiellen Changepoint-Analyse in State-Space Modellen gibt es bereits Ansätze, die auf der Idee basieren, unter Anwendung von Kalman-Rekursionen Residuen zu erzeugen, die dann überwacht werden. Ein solcher Ansatz erscheint uns nur für die Anwendung des Shewhart Charts geeignet, da es für die Anwendung der Shewhart Kontrollkarte nicht notwendig ist, die Korrelationen der einzelnen Residuen untereinander zu kennen.

Für eine Anwendung des EWMA Charts sowie des CUSUM Charts verfolgen wir einen anderen Ansatz. Hier benötigen wir die Korrelationen der in die Kontrollkarte einfließenden Beobachtungen, um die Varianz der Kontrollkarte zu ermitteln. Wir wenden die EWMA Kontrollkarten bzw. die CUSUM Kontrollkarte auf die tatsächlich beobachteten Y_i (aus (3.4.1)) an.

In einem dritten Ansatz wenden wir den CUSUM Chart auf die in Abschnitt 3.4 definierten Δ_i an. Dieser verhält sich asymptotisch wie eine CUSUM Kontrollkarte für unabhängig identisch verteilte Zufallsvektoren.

In [BaNi93] wird unter Verwendung von Kalman-Rekursionen ein Likelihood-Quotiententest konzipiert und ausführlich diskutiert. Ein Nachteil dieses Tests ist, dass die Verteilung der Beobachtungen bzw. der Fehlerprozesse bekannt sein muss (häufig wird Normalverteilung gefordert). In praktischen Anwendungen können wir i.A. nicht davon ausgehen, die Verteilung der jeweiligen stochastischen Prozesse zu kennen. Aus diesem Grund werden wir diesen Ansatz nicht weiter verfolgen.

Unser Testproblem ist im gesamten Abschnitt 5.6 analog zu den in Abschnitt 3.4.4 formulierten Changepoint-Modellen definiert.

Changepoint-Modell 1

Unser 1. Changepoint-Modell betrachtet Änderungen in der State Equation:

$$\begin{aligned} H_0: \quad & E \varepsilon_i = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}, \\ & E \omega_i = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}, \\ H_A^{(1)}: \quad & \exists 1 \leq k^* < n, \delta_1 \in \mathbb{R}^p, \|\delta_1\| \neq 0 : \\ & 0 = E \omega_1 = \dots = E \omega_{k^*} \neq \delta_1 = E \omega_{k^*+1} = \dots, E \varepsilon_i = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Changepoint-Modell 2

Analog zum 1. Changepoint-Modell betrachten wir im 2. Modell Änderungen in der Observation Equation:

$$\begin{aligned} H_0: \quad & E \varepsilon_i = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}, \\ & E \omega_i = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}, \\ H_A^{(1)}: \quad & \exists 1 \leq k^* < n, \delta_2 \in \mathbb{R}^\ell, \|\delta_2\| \neq 0 : \\ & 0 = E \varepsilon_1 = \dots = E \varepsilon_{k^*} \neq \delta_2 = E \varepsilon_{k^*+1} = \dots, E \omega_i = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Changepoint-Modell 3

Analog zu den ersten beiden Changepoint-Modellen betrachten wir im 3. Modell simultane Veränderungen in der Observation Equation und der State Equation:

$$\begin{aligned} H_0: \quad & E \varepsilon_i = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}, \\ & E \omega_i = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}, \\ H_A^{(3)}: \quad & \exists 1 \leq k^* < n, \delta_1 \in \mathbb{R}^p, \delta_2 \in \mathbb{R}^\ell, \|\delta_1\|, \|\delta_2\| \text{ nicht beide } 0 : \\ & 0 = E \omega_1 = \dots = E \omega_{k^*}, \delta_1 = E \omega_{k^*+1} = \dots, \\ & 0 = E \varepsilon_1 = \dots = E \varepsilon_{k^*}, \delta_2 = E \varepsilon_{k^*+1} = \dots \end{aligned}$$

5.6.1 Sequentielle Changepoint-Analyse über Kalman-Rekursionen

Die Kalman-Rekursionen behandeln die Schätzung des Status β_i ($i \in \mathbb{N}$). Dabei unterscheiden sich die verschiedenen Verfahren dadurch, welche Beobachtungen Y_i zur Schätzung herangezogen werden:

- Kalman-Prediction: Schätzung von β_i durch Y_1, \dots, Y_{i-1} ,
- Kalman-Filtering: Schätzung von β_i durch Y_1, \dots, Y_i ,
- Kalman-Smoothing: Schätzung von β_i durch Y_1, \dots, Y_n , wobei $n > i$.

Die Kalman-Rekursionen sind dabei so definiert, dass sie im Sinne der kleinsten quadratischen Fehler optimale Schätzer für β_i definieren. Diese entsprechen den bedingten Erwartungswerten von β_i unter den jeweils verwendeten Beobachtungen. Für die Definition von Residuen verwenden wir den Kalman-Predictor und den Kalman-Filter. Zu den Grundlagen des Kalman-Filtering/Kalman-Prediction Verfahrens vgl. z.B. [BrDa91], Abschnitt 12.2 bzw. [BrDa87], Abschnitt 12.1. Wir orientieren uns bei der Definition der Kalman-Rekursionen im Folgenden an [BrDa87], Abschnitt 12.1.

Der Kalman-Predictor $\hat{\beta}_i$ ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &:= E \beta_0 = 0, \\ \hat{\beta}_i &:= G_i \hat{\beta}_{i-1} + K_{i-1} (Y_{i-1} - \hat{Y}_{i-1}) \quad \forall i \geq 2, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \beta_0 &\text{ eine Zufallsvariable, unabhängig von } \{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ mit } E \beta_0 = 0, \\ \hat{Y}_i &:= H_i \hat{\beta}_i \quad \forall i \in \mathbb{N}, \\ K_i &:= G_{i+1} \Gamma_i H_i' (H_i \Gamma_i H_i' + \sigma^2 I_\ell)^{-1} \quad \forall i \in \mathbb{N}, \\ \Gamma_1 &:= \tau^2 I_p, \\ \Gamma_i &:= (G_i - K_{i-1} H_{i-1}) \Gamma_{i-1} (G_i - K_{i-1} H_{i-1})' + \tau^2 I_p + K_{i-1} \sigma^2 I_\ell K_{i-1}' \quad \forall i \geq 2. \end{aligned}$$

Der Kalman-Filter $\tilde{\beta}_i$ ist wie folgt definiert:

$$\tilde{\beta}_i := \hat{\beta}_i + \tilde{K}_i (Y_i - \hat{Y}_i) \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

wobei

$$\tilde{K}_i := \Gamma_i H_i' (H_i \Gamma_i H_i' + \sigma^2 I_\ell)^{-1}.$$

Bemerkung 5.8. Die Γ_i sind die Kovarianzmatrizen von $\beta_i - \hat{\beta}_i$.

Beweis: Vgl. Proposition 12.1.2 in [BrDa87]. \square

Im Folgenden setzen wir voraus, dass gilt:

$$\sigma^2 > 0. \quad (5.6.1)$$

Bemerkung 5.9. Gilt (5.6.1), so ist $H_i \Gamma_i H_i' + \sigma^2 I_\ell$ invertierbar. K_i, \tilde{K}_i sind somit wohldefiniert.

Beweis: Da Γ_i als Kovarianzmatrix positiv semi-definit ist, folgt mit Lemma 7.2

$$\det \Gamma_i \geq 0.$$

Damit erhalten wir:

$$\det (H_i \Gamma_i H_i' + \sigma^2 I_\ell) = (\det H_i)^2 \det \Gamma_i + \det \sigma^2 I_\ell > 0.$$

\square

Mit den obige Bezeichnungen und Definitionen gilt:

$$\tilde{\beta}_i - \hat{\beta}_i = \Gamma_i H_i' (H_i \Gamma_i H_i' + \sigma^2 I_\ell)^{-1} \left(H_i (\beta_i - \hat{\beta}_i) + \varepsilon_i \right). \quad (5.6.2)$$

Mit Bemerkung 5.8 folgt daraus für die Kovarianzmatrix der $\tilde{\beta}_i - \hat{\beta}_i$:

$$\begin{aligned} & \text{Cov} \left(\tilde{\beta}_i - \hat{\beta}_i \right) \\ & \stackrel{(5.6.2)}{=} \text{Cov} \left(\Gamma_i H_i' (H_i \Gamma_i H_i' + \sigma^2 I_\ell)^{-1} \left(H_i (\beta_i - \hat{\beta}_i) + \varepsilon_i \right) \right) \\ & \stackrel{\varepsilon_i \text{ unabh. von } \hat{\beta}_i}{=} \text{Cov} \left(\Gamma_i H_i' (H_i \Gamma_i H_i' + \sigma^2 I_\ell)^{-1} H_i (\beta_i - \hat{\beta}_i) \right) \\ & \quad + \text{Cov} \left(\Gamma_i H_i' (H_i \Gamma_i H_i' + \sigma^2 I_\ell)^{-1} \varepsilon_i \right) \\ & \stackrel{\text{Bemerkung 5.8}}{=} \Gamma_i H_i' (H_i \Gamma_i H_i' + \sigma^2 I_\ell)^{-1} H_i \Gamma_i H_i' (H_i \Gamma_i H_i' + \sigma^2 I_\ell)^{-1'} H_i \Gamma_i' \\ & \quad + \Gamma_i H_i' (H_i \Gamma_i H_i' + \sigma^2 I_\ell)^{-1} (H_i \Gamma_i H_i' + \sigma^2 I_\ell)^{-1'} H_i \Gamma_i' \sigma^2. \end{aligned} \quad (5.6.3)$$

Sei $\tilde{\Gamma}_i := (\tilde{\gamma}_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq p} := \text{Cov} \left(\tilde{\beta}_i - \hat{\beta}_i \right)$.

Dann definieren wir einen Shewhart Chart für die Summen der Differenzen der einzelnen Komponenten von $\tilde{\beta}_i$ und $\hat{\beta}_i$:

$$T_6(i) := \sum_{j=1}^p \left(\tilde{\beta}_i^{(j)} - \hat{\beta}_i^{(j)} \right).$$

Es gilt: $\text{Var } T_6(i) = \sum_{k=1}^p \sum_{\ell=1}^p \tilde{\gamma}_{k,\ell}$.

Ein Alarm wird ausgelöst, falls gilt:

$$T_6(i) > c \text{Var } T_6(i),$$

wobei $c > 0$ ein kritischer Wert sei.

Bemerkung 5.10. Wir haben Residuen konzipiert, die wir mit dem Shewhart Chart kontrollieren. Allerdings sind diese i.A. korreliert. Aus diesem Grund können wir zwar den Shewhart Chart anwenden, müssen aber beachten, dass die mittleren Lauflängen sich von denen im i.i.d. Fall unterscheiden können. Geeignete kritische Werte kann man durch Simulationsstudien ermitteln.

Bemerkung 5.11. Die in diesem Abschnitt vorgeschlagene Vorgehensweise zur Realisation der Shewhart Kontrollkarte hat, verglichen mit den in den beiden folgenden Abschnitten vorgestellten Verfahren, den Vorteil, dass sie mit den geringsten Voraussetzungen auskommt. Eine Anwendung des EWMA Charts oder des CUSUM Charts erscheint in diesem Rahmen wenig sinnvoll, da eine Berechnung der Korrelationen zwischen den einzelnen Residuen sehr aufwendig wäre.

5.6.2 Sequentielle Changepoint-Analyse unter Verwendung der Beobachtungen Y_i

In diesem Abschnitt betrachten wir ein durch (3.4.1), (3.4.2), (3.4.14), (3.4.15) gegebenes kausales State-Space Modell unter H_0 , wobei die Designmatrizen G_i und H_i deterministisch und konstant über die Zeit sind, d.h. es gilt $G_i = G$ und $H_i = H \forall i \in \mathbb{Z}$. G sei darüber hinaus symmetrisch.

Es gilt (vgl. Bemerkung 3.32):

$$Y_i = \sum_{j=0}^{\infty} H G^j \omega_{i-j-1} + \varepsilon_i. \quad (5.6.4)$$

Da $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ kausal ist, und somit alle Eigenwerte von G im Inneren des Einheitskreises liegen, folgt mit Lemma 7.3:

$$\sum_{j=0}^{\infty} G^j = (I_p - G)^{-1}. \quad (5.6.5)$$

Damit folgt für die Kovarianzmatrix der Y_i mit dem Satz von Lebesgue und wegen der Unabhängigkeit von $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ und $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$:

$$\text{Cov } Y_i = H (I_p - G)^{-1} (I_p - G)^{-1'} H' \tau^2 + I_\ell \sigma^2.$$

Da die Eigenwerte von G im Innern des Einheitskreises liegen, gilt dies auch für die Eigenwerte von G^2 . Mit Lemma 7.3 folgt daraus, dass $(I_p - G^2)$ invertierbar ist, und es gilt:

$$\sum_{j=0}^{\infty} G^{2j} = (I_p - G^2)^{-1}. \quad (5.6.6)$$

Aus (5.6.6) erhalten wir unter Verwendung des Satzes von Lebesgue und der Unabhängigkeit sowie Zentriertheit von $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ und $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$:

$$\begin{aligned} \text{Cov } (Y_i, Y_{i+h}) &= E \left(\sum_{j=0}^{\infty} H G^j \omega_{i-j-1} \sum_{j=-h}^{\infty} G^{j+h} H' \omega_{i-j-1} \right) \\ &= H (I_p - G^2)^{-1} G^h H' \tau^2. \end{aligned} \quad (5.6.7)$$

Sei

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_i &:= (\tilde{\gamma}_{kl})_{1 \leq k, \ell \leq p} := \text{Cov } Y_i, \\ \tilde{\Theta}_i(h) &:= \left(\tilde{\theta}_{kl}^{(h)} \right)_{1 \leq k, \ell \leq p} := \text{Cov } (Y_i, Y_{i+h}), \\ Z_i &:= \sum_{j=1}^p Y_i^{(j)}.\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\text{Var } Z_i &= \sum_{\ell=1}^p \sum_{k=1}^p \tilde{\gamma}_{lk}, \\ \gamma(h) &:= \text{Cov } (Z_i, Z_{i-h}) = \sum_{\ell=1}^p \sum_{k=1}^p \tilde{\theta}_{lk}^{(h)}.\end{aligned}$$

Wir definieren folgenden Shewhart Chart:

$$T_7(i) := Z_i.$$

Ein Alarm wird ausgelöst, falls gilt:

$$T_7(i) > c\sqrt{\text{Var } Z_i}.$$

Wir definieren folgenden EWMA Chart:

$$T_8(n) := \lambda \sum_{i=0}^{n-1} (1-\lambda)^i Z_{n-i} \text{ mit } \lambda \in (0, 1].$$

Mit Bemerkung 5.6 erhalten wir für die Varianz des EWMA Charts:

$$\begin{aligned}\text{Var } T_8(n) &= \lambda^2 \left(\frac{1 - (1-\lambda)^{2n}}{1 - (1-\lambda)^2} \text{Var } Z_1 + 2 \sum_{h=1}^{n-1} \gamma(h) \frac{1 - (1-\lambda)^{2(n-h)}}{1 - (1-\lambda)^2} (1-\lambda)^h \right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{Var } Z_1 \frac{\lambda}{2-\lambda} + \frac{2\lambda}{2-\lambda} \sum_{h=1}^{\infty} \gamma(h) (1-\lambda)^h.\end{aligned}$$

Ein Alarm wird ausgelöst, falls gilt:

$$T_8(i) > c\sqrt{\text{Var } T_8(i)}.$$

Wir definieren folgenden CUSUM Chart:

$$T_8(n) := \sum_{i=1}^n Z_i.$$

Für die Varianz des CUSUM Charts erhalten wir:

$$\text{Var } T_8(n) = \sigma^2 + \frac{2}{n} \sum_{h=1}^{n-1} \gamma(h).$$

Ein Alarm wird ausgelöst, falls gilt:

$$T_8(i) > c\sqrt{\text{Var } T_8(i)}.$$

Ein Vorteil der in diesem Abschnitt 5.6.2 vorgestellten Vorgehensweise ist, dass sich die meisten Arbeiten zu Kontrollkarten für korrelierte Zufallsvariablen auf stationäre Folgen von Zufallsvariablen beziehen (vgl. [Sch95], [Sch97], [ScSc97], [AmScFr97], [ScScKn99]). Somit lassen sich Ergebnisse dieser Arbeiten auf den hier vorgestellten Ansatz anwenden.

5.6.3 Sequentielle Changepoint-Analyse unter Verwendung der Δ_i

Wir betrachten das durch (3.4.1)-(3.4.15) gegebene State-Space Modell. Weiter gelten (3.4.33), (3.4.34). Theorem 3.11 liefert uns unter H_0 folgende Aussage:

Es gibt eine Folge von i.i.d. normalverteilten zentrierten Zufallsvektoren $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\text{Cov } Z_1 = \sigma^2 A + \tau^2 B$, so dass gilt:

$$\left\| \sum_{j=1}^n \Delta_j - \sum_{j=1}^n Z_j \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o\left(n^{\frac{1}{2}}(\log n)^{-\lambda}\right) \text{ für ein } \lambda > 1 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (5.6.8)$$

Wir definieren den folgenden CUSUM Chart:

$$T_9(n) := \left(\sum_{i=1}^n \Delta_i \right)' C_n^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \Delta_i \right),$$

$$C_n := \sigma^2 \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (I_\ell + Q_j)(I_\ell + Q_j)' + \tau^2 \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n H_j H_j'.$$

Wegen (3.4.33) ist C_k invertierbar.

Die Teststatistik T_9 verhält sich asymptotisch wie ein CUSUM Chart für unabhängig identisch verteilte Zufallsvektoren.

5.6.4 Varianzschätzer

Die Varianzen τ^2 bzw. σ^2 der Fehlerprozesse $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ bzw. $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ sind i.A. nicht bekannt. Zur Schätzung können wir so vorgehen wie in Abschnitt 5.3 bereits angedeutet. Wir wählen die in Abschnitt 3.4.8.1 unter der Nullhypothese definierten Varianzschätzer, lassen aber die "letzten" Beobachtungen nicht in die Schätzer einfließen. Wieviele Beobachtungen man nicht für die Schätzer berücksichtigt, ist abhängig von der Zielsetzung der Kontrollkarte. Hierzu sind Simulationsstudien durchzuführen.

6 Fazit und Ausblick

Wir haben in der vorliegenden Dissertation theoretische Eigenschaften von Verfahren der Changepoint-Analyse herausgearbeitet und durch Simulationen untersucht. Bezüglich linearer Modelle werden in [Gie02a] verschiedene Verfahren auf Realdaten der Deutschen Telekom angewendet.

Die vorgestellten Methoden stellen ein sehr nützliches Hilfsmittel zur Erkennung von Strukturbrüchen in Datensätzen zur Verfügung. Die Komplexität der Verfahren ist darin begründet, dass außer der Annahme eines Grundmodells (lineares Modell bzw. State-Space Modell) keine Kenntnis über die spezielle Ausprägung der Parameter vorhanden sein muss. Die Schätzung der Modellparameter ist in die Konzeption der Teststatistiken integriert.

Wir führen an dieser Stelle einige Aspekte an, die in der vorliegenden Arbeit nicht oder nur am Rande behandelt werden, aber gerade im Hinblick auf praktische Anwendungen wertvolle Resultate versprechen.

6.1 Simulationsstudien zur sequentiellen Changepoint Analyse

Bezüglich sequentieller Verfahren zur Changepoint-Analyse werden hier keine Simulationsstudien durchgeführt, sondern zahlreiche Literaturangaben gemacht. Gerade bei sequentiellen Verfahren sind die Ergebnisse stark abhängig von der jeweiligen Problemstellung und Zielsetzung. Es ist deshalb sinnvoll, bei Anwendung sequentieller Methoden projektbezogen Simulationsstudien durchzuführen.

6.2 Untersuchung von Changepoint-Modellen mit Wechsel in der Varianz

Wir gehen bei unseren Changepoint-Modellen stets davon aus, dass sich die Varianz der jeweiligen Fehlerprozesse nicht verändert. Diese Voraussetzung muss in praktischen Anwendungen nicht erfüllt sein. Zu dieser Problemstellung gibt es bereits Untersuchungen. In [CsHo97], Abschnitt 3.1.2. wird ein lineares Modell mit simultaner Veränderung im Regressionsvektor und in der Varianz des Fehlerprozesses betrachtet. Die dort verwendete Teststatistik ist die Union-Intersection Teststatistik (vgl. Abschnitt 3.2). Der Fehlerprozess wird allerdings als Folge unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen vorausgesetzt.

Steinebach und Horváth betrachten in [StHo00] ein sehr allgemeines Modell, das auf Änderungen im Mittelwert oder der Varianz getestet wird.

In [Gan95] werden sequentielle Verfahren zur simultanen Überwachung von Mittelwert und Varianz eines stochastischen Prozesses diskutiert.

6.3 Untersuchung gradueller Veränderungen in linearen Modellen

Bezüglich linearer Modelle wird hier nur der Fall von abrupten Strukturbrüchen (im Regressionsvektor bzw. im Fehlerprozess) betrachtet.

In Abschnitt 3.4 werden graduelle Veränderungen für die allgemeiner definierten State-Space Modelle untersucht. Für die dort erzielten Ergebnisse sind noch keine Simulationsstudien durchgeführt worden.

Im Hinblick auf praktische Anwendungen erscheint es sinnvoll, den Fall gradueller Veränderungen weitergehend zu untersuchen.

7 Anhang

7.1 Grundlagen der Linearen Algebra

Definition 7.1. Eine symmetrische Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n} \setminus \{0\}$ heißt positiv definit, falls gilt:

$$x'Sx > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Definition 7.2. Eine symmetrische Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt positiv semi-definit, falls gilt:

$$x'Sx \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Lemma 7.1. Für eine symmetrische Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- S ist positiv definit.
- $W'SW$ ist positiv definit für alle invertierbaren Matrizen $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
- Es gibt eine invertierbare Matrix $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass gilt:

$$S = W'W.$$

- Alle Eigenwerte von S sind positiv.
- S ist invertierbar und S^{-1} ist positiv definit.
- S ist positiv semi-definit und $\det S > 0$.

Beweis: S. z.B. [Koe85], S. 152, S. 190, S. 195. □

Bemerkung 7.1. Sind A, B positiv definit, so ist auch $A + B$ positiv definit.

Lemma 7.2. Für eine symmetrische Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- S ist positiv semi-definit.
- $W'SW$ ist positiv semi-definit für alle Matrizen $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
- Es gibt eine Matrix $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass gilt $S = W'W$.

Ist dies der Fall, so gilt: $\det S \geq 0$.

Beweis: S. z.B. [Koe85], S. 189. □

Bezeichnung 7.1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann heißt

$$\rho(A) := \max \{ |\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A \}$$

der Spektralradius von A .

Lemma 7.3. Gelte für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\rho(A) < 1$. Dann folgt:

$$I_n - A \text{ ist invertierbar,}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} A^j = (I_n - A)^{-1}.$$

Beweis: S. z.B. [Heu90], Satz 112.4. □

Lemma 7.4. Sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine positiv definite Matrix und $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge n -dimensionaler Vektoren mit reellwertigen Komponenten. Dann gilt:
Es gibt Konstanten $c_1, c_2 > 0$, so dass gilt:

$$c_1 x'_k x_k \leq x'_k S x_k \leq c_2 x'_k x_k.$$

Beweis: Sei

$$x_k := (x_{1,k}, \dots, x_{n,k})'$$

und

$$\Lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von S .

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i x'_k x_k &= \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \sum_{j=1}^n x_{j,k}^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{j,k}^2 \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \sum_{j=1}^n x_{j,k}^2 \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i x'_k x_k. \end{aligned} \tag{7.1.1}$$

Wegen

$$x'_k S x_k = x'_k \Lambda x_k = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{j,k}^2$$

folgt aus (7.1.1) die Behauptung. □

7.2 Eigenschaften von Konvergenzarten und der Landausymbole

Wir stellen in diesem Abschnitt einige grundlegende Eigenschaften der P -fast sicheren und der P -stochastischen Konvergenz sowie der Landausymbole $o, o_P, \mathcal{O}, \mathcal{O}_P$ vor.

Bemerkung 7.2. *Es gelten die folgenden einfachen aber nützlichen Rechenregeln für Landausymbole:*

$$\begin{aligned} o_P(1) + \mathcal{O}_P(1) &= \mathcal{O}_P(1), \\ \mathcal{O}_P(1) o_P(1) &= o_P(1), \\ (1 + o_P(1))^{-1} &= \mathcal{O}_P(1), \\ o_P(X_n) &= X_n o_P(1), \\ \mathcal{O}_P(X_n) &= X_n \mathcal{O}_P(1), \\ o_P(\mathcal{O}_P(1)) &= o_P(1). \end{aligned}$$

Beweis: S. z.B. [Vaa98], S. 12/13. □

Bemerkung 7.3. *Für den Fall, dass $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}, \{Y_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ deterministische Prozesse sind, sind die Symbole o, o_P bzw. $\mathcal{O}, \mathcal{O}_P$ äquivalent mit den aus der Analysis bekannten Symbolen o bzw. \mathcal{O} . Das heißt, es gilt:*

$$X_t \stackrel{P-f.s.}{=} o(Y_t) \text{ oder } X_t = o_P(Y_t) \ (t \rightarrow \infty) \iff \frac{X_t}{Y_t} \rightarrow 0 \ (t \rightarrow \infty),$$

$$X_t \stackrel{P-f.s.}{=} \mathcal{O}(Y_t) \text{ oder } \mathcal{O}_P(Y_t) \ (t \rightarrow \infty) \iff \exists C > 0 : \left\| \frac{X_t}{Y_t} \right\| \leq C \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Das folgende Lemma beschreibt verschiedene Möglichkeiten zur Charakterisierung P -fast sicherer Konvergenz.

Lemma 7.5. *Seien Y_1, Y_2, \dots, Y reelle Zufallsvariablen. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

- (i) $Y_n \xrightarrow{P-f.s.} Y$,
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\sup_{m \geq n} |Y_m - Y| \geq \varepsilon \right) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$,
- (iii) $P \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} |Y_n - Y| \geq \varepsilon \right) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$.

Beweis: S. z.B. [Bau90], S. 132, Lemma 20.6. □

Das folgende Lemma erlaubt es, aus der Konvergenz von Zufallsmatrizen auf die Konvergenz der Inversen zu schließen.

Lemma 7.6. *Sei $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge, P -f.s. invertierbarer Zufallsmatrizen mit Bildbereich $\subset \mathbb{R}^{p \times p}$. Weiter sei die (deterministische) Matrix $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$ invertierbar und $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(k) = \mathcal{O}(1)$. Dann gilt für $k \rightarrow \infty$:*

$$\|A_k - A\| \stackrel{P-f.s.}{=} o(f(k)) \Leftrightarrow \|A_k^{-1} - A^{-1}\| \stackrel{P-f.s.}{=} o(f(k)), \quad (7.2.1)$$

$$\|A_k - A\| = o_P(f(k)) \Leftrightarrow \|A_k^{-1} - A^{-1}\| = o_P(f(k)), \quad (7.2.2)$$

$$\begin{aligned} \|A_k - A\| &= \mathcal{O}_P(f(k)), |f(k)| \downarrow 0 \\ &\Leftrightarrow \|A_k^{-1} - A^{-1}\| = \mathcal{O}_P(f(k)), |f(k)| \downarrow 0. \end{aligned} \quad (7.2.3)$$

Beweis: Sämtliche asymptotischen Aussagen im Beweis zu Lemma 7.6 gelten für $k \rightarrow \infty$.

Sei $A := (a_{ij})$, $A_k := (a_{ij}^{(k)})$, $1 \leq i, j \leq p$.

Gelte:

$$\|A_k - A\| \stackrel{P-f.s.}{=} o(f(k)).$$

Wir zeigen zunächst:

$$\left| \frac{1}{\det A} - \frac{1}{\det A_k} \right| \stackrel{P-f.s.}{=} o(f(k)). \quad (7.2.4)$$

Aus $|a_{ij} - a_{ij}^{(k)}| \stackrel{P-f.s.}{=} o(f(k)) \quad \forall 1 \leq i, j \leq p$ folgt wegen

$$|\det A_k - \det A| \leq p! \left(\max_{1 \leq i, j \leq p} |a_{ij}^{(k)} - a_{ij}| \right)^p \quad (7.2.5)$$

(Darstellungssatz für Matrizen (Leibnizsche Formel), vgl. z.B. [Koe85], S.111)

$$|\det A - \det A_k| \stackrel{P-f.s.}{=} o(f(k)). \quad (7.2.6)$$

Mit (7.2.6) und Lemma 7.5 erhalten wir:

$$\forall \varepsilon_1, \varepsilon'_1 > 0 \quad \exists \quad k_1 : \quad P \left(\sup_{k \geq k_1} \frac{|\det A - \det A_k|}{f(k)} \geq \varepsilon_1 \right) < \varepsilon'_1. \quad (7.2.7)$$

Weiter folgt aus (7.2.6) mit Lemma 7.5 wegen $f(k) = \mathcal{O}(1)$:

$$\forall \varepsilon'_2 > 0 \quad \exists \quad k_2 : \quad P \left(\sup_{k \geq k_2} |\det A - \det A_k| \geq \frac{1}{2} |\det A| \right) < \varepsilon'_2. \quad (7.2.8)$$

Sei $\varepsilon := \frac{2}{(\det A)^2} \varepsilon_1$ und $k_0 := \max(k_1, k_2)$.

Dann folgt:

$$\begin{aligned}
& P \left(\sup_{k \geq k_0} \left| \frac{\frac{1}{\det A_k} - \frac{1}{\det A}}{f(k)} \right| \geq \varepsilon \right) \\
&= P \left(\sup_{k \geq k_0} \left| \frac{\det A - \det A_k}{\det A_k \det A f(k)} \right| \geq \varepsilon \right) \\
&\stackrel{(7.2.8)}{<} P \left(\sup_{k \geq k_0} \left| \frac{2}{(\det A)^2} \frac{\det A - \det A_k}{f(k)} \right| \geq \varepsilon \right) + \varepsilon'_2 \\
&\stackrel{(7.2.7)}{<} \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2.
\end{aligned}$$

Mit Lemma 7.5 erhalten wir hieraus (7.2.4).

Sei $A^{(j,i)}$ die Matrix, die aus A durch Streichen der j -ten Zeile und der i -ten Spalte entsteht ($A_k^{(j,i)}$ entsprechend).

Wegen

$$\left| \det A_k^{(j,i)} - \det A^{(j,i)} \right| \leq (p-1)! \left(\max_{1 \leq i, j \leq p} \left| a_{ij}^{(k)} - a_{ij} \right| \right)^{p-1} \quad (7.2.9)$$

folgt aus

$$\begin{aligned}
& \left| a_{ij} - a_{ij}^{(k)} \right| \stackrel{P-f.s.}{=} o(f(k)) \\
& \left| \det A^{(j,i)} - \det A_k^{(j,i)} \right| \stackrel{P-f.s.}{=} o(f(k)). \quad (7.2.10)
\end{aligned}$$

Mit $A^\# := (a_{ij}^\#) := ((-1)^{i+j} \det A^{(j,i)})$

und $A_k^\# := (a_{ij}^{\#(k)}) := ((-1)^{i+j} \det A_k^{(j,i)})$ gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^\# \quad \text{und} \quad A_k^{-1} \stackrel{P-f.s.}{=} \frac{1}{\det A_k} A_k^\#. \quad (7.2.11)$$

(Zum Beweis s. z.B. [Koe85], S. 109.)

Insbesondere gilt wegen (7.2.10) und $\left| a_{ij} - a_{ij}^{(k)} \right| \stackrel{P-f.s.}{=} o(f(k))$:

$$\left\| A_k^\# - A^\# \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} o(f(k)), \quad (7.2.12)$$

$$\left\| A_k^\# \right\| \stackrel{P-f.s.}{=} \mathcal{O}(1). \quad (7.2.13)$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\|A_k^{-1} - A^{-1}\| &\stackrel{P-f.s. (7.2.11)}{=} \left\| \frac{1}{\det A_k} A_k^\# - \frac{1}{\det A} A^\# \right\| \\
&\stackrel{P-f.s. (7.2.4), (7.2.13)}{=} \left\| \frac{1}{\det A} (A_k^\# - A^\#) \right\| + o(f(k)) \\
&\stackrel{P-f.s. (7.2.12)}{=} o(f(k)).
\end{aligned}$$

Damit haben wir (7.2.1) nachgewiesen.

Der Beweis für (7.2.2) verläuft ähnlich zum Beweis von (7.2.1).

Gelte:

$$\|A_k - A\| = o_P(f(k)).$$

Wir zeigen zunächst:

$$\left| \frac{1}{\det A} - \frac{1}{\det A_k} \right| = o_P(f(k)). \quad (7.2.14)$$

Aus $|a_{ij} - a_{ij}^{(k)}| = o_P(f(k)) \quad \forall 1 \leq i, j \leq p$ folgt mit (7.2.5):

$$|\det A - \det A_k| = o_P(f(k)). \quad (7.2.15)$$

Mit (7.2.15) erhalten wir:

$$\forall \varepsilon_1, \varepsilon'_1 > 0 \quad \exists \quad k_1 : \quad P \left(\left| \frac{\det A - \det A_k}{f(k)} \right| \geq \varepsilon_1 \right) < \varepsilon'_1 \quad \forall \quad k \geq k_1. \quad (7.2.16)$$

Weiter folgt aus (7.2.15) wegen $f(k) = \mathcal{O}(1)$:

$$\forall \quad \varepsilon'_2 > 0 \quad \exists \quad k_2 : \quad P \left(|\det A - \det A_k| \geq \frac{1}{2} |\det A| \right) < \varepsilon'_2 \quad \forall \quad k \geq k_2. \quad (7.2.17)$$

Sei $\varepsilon := \frac{2}{(\det A)^2} \varepsilon_1$ und $k_0 := \max(k_1, k_2)$. Dann folgt mit (7.2.16) und (7.2.17):

$$P \left(\left| \frac{\frac{1}{\det A_k} - \frac{1}{\det A}}{f(k)} \right| \geq \varepsilon \right) < \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 \quad \forall \quad k \geq k_0.$$

Damit erhalten wir (7.2.14).

Mit (7.2.9) folgt aus $|a_{ij} - a_{ij}^{(k)}| = o_P(f(k)) \quad \forall 1 \leq i, j \leq p$:

$$|\det A^{(j,i)} - \det A_k^{(j,i)}| = o_P(f(k)). \quad (7.2.18)$$

Wiederum wegen $|a_{ij} - a_{ij}^{(k)}| = o_P(f(k))$ folgt:

$$\|A_k^\# - A^\#\| = o_P(f(k)), \quad (7.2.19)$$

$$\|A_k^\#\| = \mathcal{O}_P(1). \quad (7.2.20)$$

Aus (7.2.11), (7.2.14), (7.2.18), (7.2.19), (7.2.20), folgt (7.2.2).

Der Beweis für (7.2.3) erfolgt ähnlich zum Beweis von (7.2.1) bzw. (7.2.2).

Gelte:

$$\|A_k - A\| \stackrel{P-f.s.}{=} \mathcal{O}_P(f(k)).$$

Wir zeigen zunächst:

$$\left| \frac{1}{\det A} - \frac{1}{\det A_k} \right| = \mathcal{O}_P(f(k)). \quad (7.2.21)$$

Aus $|a_{ij} - a_{ij}^{(k)}| = \mathcal{O}_P(f(k)) \quad \forall 1 \leq i, j \leq p$ folgt mit (7.2.5):

$$|\det A - \det A_k| = \mathcal{O}_P(f(k)). \quad (7.2.22)$$

Mit (7.2.22) erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon_1 > 0 \exists k_1 \in \mathbb{N}, C_1 > 0 : \\ & P \left(\left| \frac{\det A_k - \det A}{f(k)} \right| \geq C_1 \right) < \varepsilon_1 \quad \forall k \geq k_1. \end{aligned} \quad (7.2.23)$$

Weiter gilt wegen $|f(k)| \downarrow 0$:

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \exists k_2 : P \left(|\det A_k - \det A| \geq \frac{1}{2} |\det A| \right) < \varepsilon_2 \quad \forall k \geq k_2. \quad (7.2.24)$$

Sei $C := \frac{2}{\det A^2} C_1$ und $k_0 := \max(k_1, k_2)$.

Dann folgt aus (7.2.23) und (7.2.24):

$$P \left(\left| \frac{\det A_k - \det A}{f(k)} \right| \geq C \right) < \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 \quad \forall k \geq k_0.$$

Damit erhalten wir (7.2.21).

Mit (7.2.9) folgt aus $|a_{ij} - a_{ij}^{(k)}| = \mathcal{O}_P(f(k)) \quad \forall 1 \leq i, j \leq p$:

$$|\det A^{(j,i)} - \det A_k^{(j,i)}| = \mathcal{O}_P(f(k)). \quad (7.2.25)$$

Wiederum wegen $|a_{ij} - a_{ij}^{(k)}| = \mathcal{O}_P(f(k))$ folgt:

$$\|A_k^\# - A^\#\| = \mathcal{O}_P(f(k)), \quad (7.2.26)$$

$$\|A_k^\#\| = \mathcal{O}_P(1). \quad (7.2.27)$$

Aus (7.2.11), (7.2.21), (7.2.25), (7.2.26), (7.2.27), folgt (7.2.3). \square

Lemma 7.7. Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(k) \neq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$ und $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsmatrizen, für die gilt:

$$A_k = \mathcal{O}_P(f(k)) \quad (k \rightarrow \infty). \quad (7.2.28)$$

Dann folgt:

$$\max_{1 \leq k \leq n} \frac{\|A_k\|}{f(k)} = \mathcal{O}_P(1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Beweis: Aus (7.2.28) folgt:

$$\exists C > 0 : \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : P \left(\max_{k \geq N} \frac{\|A_k\|}{|f(k)|} > C \right) < \varepsilon. \quad (7.2.29)$$

Weiter gilt:

$$\exists C_\varepsilon : P \left(\max_{1 \leq k \leq N} \frac{\|A_k\|}{|f(k)|} > C_\varepsilon \right) = 1 - F(C_\varepsilon) < \varepsilon. \quad (7.2.30)$$

F sei dabei die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen

$$Y_N := \max_{1 \leq k \leq N} \frac{\|A_k\|}{|f(k)|}.$$

Aus (7.2.29) und (7.2.30) erhält man:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon := \max(C, C_\varepsilon) : P \left(\max_{k \in \mathbb{N}} \frac{\|A_k\|}{|f(k)|} > c_\varepsilon \right) < 2\varepsilon.$$

Hieraus erhalten wir die Behauptung. \square

Das folgende Lemma liefert ein nützliches Kriterium für P -stochastische Konvergenz über die Betrachtung der Momente der Verteilung.

Lemma 7.8. Sei $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit existierenden Momenten der Ordnung $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gilt für $n \rightarrow \infty$:

$$E|X_n|^k = o(g(n)) \Rightarrow X_n = o_P \left(g(n)^{\frac{1}{k}} \right), \quad (7.2.31)$$

$$E|X_n|^k = \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow X_n = \mathcal{O}_P \left(g(n)^{\frac{1}{k}} \right). \quad (7.2.32)$$

Beweis: Es gilt:

$$P \left(\frac{|X_n|}{g(n)^{\frac{1}{k}}} > \varepsilon \right) \stackrel{\text{Markov-Ungleichung}}{\leq} \frac{E|X_n|^k}{g(n)\varepsilon^k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Damit folgt (7.2.31).

Sei $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, für die gilt:

$$Z_n \xrightarrow{P} \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

Das heißt, es gibt $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f \uparrow \infty$, so dass gilt:

$$f(n) = o_P(Z_n) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Gelte:

$$E |X_n|^k = \mathcal{O}(g(n)) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Dann folgt mit (7.2.31):

$$X_n = o_P \left(\frac{g(n)^{\frac{1}{k}}}{f(n)} \right) = o_P \left(\frac{g(n)^{\frac{1}{k}}}{Z_n} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (7.2.33)$$

Wir nehmen an,

$$X_n = \mathcal{O}_P \left(g(n)^{\frac{1}{k}} \right) \quad (n \rightarrow \infty) \text{ gelte nicht.} \quad (7.2.34)$$

Dann folgt:

$$Z_n := \max_{1 \leq \ell \leq n} \left| \frac{X_\ell}{g(\ell)^{\frac{1}{k}}} \right|^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{P} \infty \quad (n \rightarrow \infty). \quad (7.2.35)$$

Mit (7.2.33) und (7.2.35) folgt:

$$X_n = o_P \left(\frac{g(n)^{\frac{1}{k}}}{\max_{1 \leq \ell \leq n} \left| \frac{X_\ell}{g(\ell)^{\frac{1}{k}}} \right|^{\frac{1}{2}}} \right) = o_P \left(\left(\frac{g(n)^{\frac{1}{k}}}{X_n} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Also erhalten wir einen Widerspruch zu (7.2.34). Damit ist (7.2.32) bewiesen. \square

Das folgende Theorem wird auch als starkes Gesetz der großen Zahlen nach Marcinkiewicz-Zygmund bezeichnet. Es liefert ein nützliches Kriterium für P -fast sichere Konvergenz von Zufallsvariablen über die Existenz von Momenten einer bestimmten Ordnung.

Theorem 7.1. *Sei $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit $E |X_1|^p < \infty$ für ein $p \in (0, 2)$. Dann gilt für ein $c \in \mathbb{R}$:*

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - nc}{n^{\frac{1}{p}}} \xrightarrow{P\text{-f.s.}} 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (7.2.36)$$

Falls $p \in (0, 1)$, so kann c beliebig gewählt werden. Für $p \in [1, 2)$ gilt $c = E X_1$.

Beweis: S. z.B. [ChTe88], S. 125. \square

Das folgende Lemma stellt eine Verallgemeinerung der Ungleichung von Kolmogorov dar.

Lemma 7.9. *Sei $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ein Submartingal. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$ und alle $k \in \mathbb{N}$:*

$$P \left(\max_{1 \leq i \leq k} Z_i > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon} E |Z_k|.$$

Beweis: Den Beweis findet man z.B. in [Bre93], S.88. \square

7.3 Beweise der Invarianzprinzipien

Ziel dieses Abschnitts ist es, die Beweise für die in Kapitel 2 zitierten Theoreme 2.5 sowie 2.6 zu erbringen. Wir beginnen mit einigen vorbereitenden Definitionen und Lemmata. Als Maß für die Abweichung zweier Verteilungsfunktionen verwenden wir die Prohorov-Distanz.

Definition 7.3. Seien P_1, P_2 W -Maße auf $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}^p)$. Dann ist die Prohorov-Distanz wie folgt definiert:

$$\pi(P_1, P_2) = \inf \{ \varepsilon > 0 \mid P_1(A) \leq P_2(A^\varepsilon) + \varepsilon \text{ für alle } A \subset \mathcal{B}^p \}.$$

Dabei sei $A^\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^p \mid \exists y \in A : \|x - y\| < \varepsilon\}$.

Bemerkung 7.4. Für zwei W -Maße P_1, P_2 auf $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}^p)$ gilt:

$$\pi(P_1, P_2) = \pi(P_2, P_1).$$

Beweis: Vgl. [Str65]. □

Bezeichnung 7.2. Für einen Zufallsvektor Y bezeichne $\mathcal{L}(Y)$ die Verteilung von Y .

Ein einfaches, aber nützliches Hilfsmittel zur Bestimmung der Prohorov-Distanz liefert das folgende Lemma.

Lemma 7.10. Seien X, Y Zufallsvektoren auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) mit existierenden Momenten der Ordnung $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\pi(\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y)) \leq (\mathbb{E} \|X - Y\|^k)^{\frac{1}{k+1}}.$$

Beweis: Sei $A \in \mathcal{A}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & P(X \in A) - P(Y \in A^\varepsilon) \\ = & P(X \in A) - P(X \in A, Y \in A^\varepsilon) \\ & - (P(Y \in A^\varepsilon) - P(Y \in A^\varepsilon, X \in A)) \\ = & P(X \in A, Y \notin A^\varepsilon) - P(Y \in A^\varepsilon, X \notin A) \\ \leq & P(\|X - Y\| \geq \varepsilon) \\ \stackrel{\text{Markov-Ungleichung}}{\leq} & \frac{\mathbb{E} \|X - Y\|^k}{\varepsilon^k}. \end{aligned} \tag{7.3.1}$$

Aus (7.3.1) ergibt sich die Behauptung mit $\varepsilon := (\mathbb{E} \|X - Y\|^k)^{\frac{1}{k+1}}$. □

Lemma 7.11. Seien X, Y \mathcal{A}_1 - bzw. \mathcal{A}_2 -messbare Zufallsvektoren. Seien $r_1, r_2, r_3 > 1$ mit $r_1^{-1} + r_2^{-1} + r_3^{-1} = 1$. Es gelte: $\|X\|_{r_2}, \|Y\|_{r_3} < \infty$. Dann folgt:

$$|\mathbb{E} X'Y - \mathbb{E} X' \mathbb{E} Y| \leq 10 \alpha(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)^{\frac{1}{r_1}} \|X\|_{r_2} \|Y\|_{r_3},$$

wobei

$$\alpha(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) := \sup_{A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2} |P(A_1 A_2) - P(A_1)P(A_2)|.$$

Beweis: S. [KuPh80] und [Deo73]. □

Dehling beweist in [Deh83] folgendes Lemma, das die Prohorov-Distanz zwischen einer Partialsumme unabhängiger Zufallsvektoren und einer Partialsumme unabhängig identisch normalverteilter Zufallsvektoren abschätzt.

Lemma 7.12. *Sei $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge p -dimensionaler zentrierter unabhängiger Zufallsvektoren. Weiter existieren die Momente der Ordnung $2 + \delta$ für ein $\delta > 0$, und es gibt eine Konstante const_{25} , so dass gilt:*

$$\max_{1 \leq i \leq n} \mathbb{E} \|X_i\|^{2+\delta} \leq \text{const}_{25} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \|X_i\|^{2+\delta}.$$

Sei A_n die Kovarianzmatrix von $n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n X_i$. Dann gilt:

$$\pi \left(\mathcal{L} \left(n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n X_i \right), N(0, A_n) \right) \leq \text{const}_{26} n^{-\frac{\delta}{9}} p^{\frac{1}{3}} \rho_{2+\delta}^{\frac{2}{9}},$$

wobei const_{26} nur von δ abhängt, d.h. insbesondere unabhängig von n und der speziellen Ausprägung von $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ gewählt werden kann.

Beweis: S. [Deh83], Beweis zu Proposition 5.1. und anschließende Bemerkung. \square

Ebenfalls in [Deh83] wird ein ähnlicher Zusammenhang wie in Lemma 7.12 für stark mischende Zufallsvektoren nachgewiesen. Dabei wird allerdings die Existenz von Momenten höher als dritter Ordnung vorausgesetzt.

Lemma 7.13. *Sei $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge p -dimensionaler zentrierter stark mischender Zufallsvektoren. Für den Mischungskoeffizienten α gelte: Es gibt eine Konstante const_8 , so dass gilt:*

$$\alpha(k) \leq \text{const}_8 \left(k^{-(1+\varepsilon)(3+\frac{9}{\delta})} \right) \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ für ein } \varepsilon > 0 \text{ und ein } \tilde{\delta} > 0. \quad (7.3.2)$$

Weiter existieren die Momente der Ordnung $3 + \tilde{\delta}$ für ein $\tilde{\delta} > 0$, und es gilt: Es gibt eine Konstante const_{27} , so dass gilt:

$$\max_{1 \leq i \leq n} \mathbb{E} \|X_i\|^{3+\tilde{\delta}} \leq \text{const}_{27} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \|X_i\|^{3+\tilde{\delta}}. \quad (7.3.3)$$

Sei A_n die Kovarianzmatrix von $n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n X_i$. Dann gilt:

$$\pi \left(\mathcal{L} \left(n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n X_i \right), N(0, A_n) \right) \leq \text{const}_{28} n^{-\frac{1}{20}} \left(1 + \rho_{3+\tilde{\delta}}^{\frac{3}{3+\tilde{\delta}}} \right), \quad (7.3.4)$$

wobei die Konstante const_{28} nur von const_8 , ε sowie $\tilde{\delta}$ abhängt.

Beweis: S. [Deh83], Proposition 6.2. \square

In Lemma 7.13 wird die Partialsumme einer Folge stark mischender Zufallsvektoren durch eine Partialsumme unabhängig identisch normalverteilter Zufallsvektoren im Sinne der Prohorov- Distanz approximiert. Es wird dabei vorausgesetzt, dass die Momente der Ordnung $3 + \tilde{\delta}$ ($\tilde{\delta} > 0$) der X_i ($i \in \mathbb{N}$) existieren. Um Theorem 2.6 nachweisen zu können, benötigen wir eine solche Approximation unter der schwächeren Bedingung, dass die Momente der Ordnung $2 + \delta$ ($0 < \delta < 1$) existieren. Das folgende Lemma leistet dies. Für den Beweis verwenden wir das Resultat von Lemma 7.13.

Lemma 7.14. *Sei $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge p -dimensionaler zentrierter stark mischender Zufallsvektoren. Die Momente der Ordnung $2 + \delta$ ($0 < \delta < 1$) existieren. Für den Mischungskoeffizienten α der $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ gelte:
Es gibt eine Konstante const_8 , so dass gilt:*

$$\alpha(k) \leq \text{const}_8 \left(k^{-(1+\varepsilon)(1+\frac{2}{\delta})} \right) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{für ein } 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (7.3.5)$$

Weiter gebe es Konstanten const_{29} , const_{30} , const_{31} , const_{32} (unabhängig von n), so dass gilt:

$$\mathbb{E} \|X_i\|^{2+\delta} \leq \text{const}_{29} \left(\mathbb{E} \|X_i\|^2 \right)^{\frac{2+\delta}{2}} \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad (7.3.6)$$

$$\sum_{i=1}^m \left(\mathbb{E} \|X_i\|^2 - 2 \mathbb{E} \|X_i\| \mathbb{1}_{\{\|X_i\| > \text{const}_{30}\}} \right)^{\frac{3+\tilde{\delta}}{2}} \geq \text{const}_{31} \sum_{i=1}^m \left(\mathbb{E} \|X_i\|^2 \right)^{\frac{3+\tilde{\delta}}{2}} \quad (7.3.7)$$

$\forall m$ hinr. groß,

$$\max_{1 \leq i \leq n} \mathbb{E} \|X_i\|^2 \leq \text{const}_{32} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\mathbb{E} \|X_i\|^2 \right)^{\frac{3+\tilde{\delta}}{2}} \quad \text{für ein } \tilde{\delta} \geq \frac{9}{2} \frac{\delta}{1-\delta}. \quad (7.3.8)$$

Sei A_n die Kovarianzmatrix von $n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n X_i$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \pi \left(\mathcal{L} \left(n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n X_i \right), N(0, A_n) \right) \\ & \leq \text{const}_{33} \left(n^{-\frac{1}{20}} + n^{\frac{3}{3+\delta}(1+\tilde{\delta}-\delta)} \text{const}_{34} - \frac{1}{20} \max_{1 \leq i \leq n} \left(\mathbb{E} \|X_i\|^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right. \\ & \quad \left. + n^{-\frac{2(\delta-\delta')}{6+3\delta'}} \text{const}_{34} \max_{1 \leq i \leq n} \left(\mathbb{E} \|X_i\|^2 \right)^{\frac{2+\delta}{6+3\delta'}} \right), \end{aligned} \quad (7.3.9)$$

wobei $\delta' := \delta \frac{2}{2+\varepsilon}$ und $\text{const}_{34} \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt.

Die Konstante const_{33} ist abhängig von const_8 , const_{29} , const_{32} , const_{34} , δ , ε , $\tilde{\delta}$, aber unabhängig von n .

Beweis: Sei N zunächst fest gewählt und für $i \in \mathbb{N}$:

$$Z_i = Z_i(N) := X_i \mathbb{1}_{\{\|X_i\| \leq N^{\text{const}_{34}}\}} - \mathbb{E} \left(X_i \mathbb{1}_{\{\|X_i\| \leq N^{\text{const}_{34}}\}} \right). \quad (7.3.10)$$

Dann ist $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ stark mischend mit derselben Rate wie $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ (wie in 7.3.5).

Dies folgt unmittelbar aus der Mischungseigenschaft für $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, wenn man $\mathcal{A}(Z_\ell, \dots, Z_k) \subset \mathcal{A}(X_\ell, \dots, X_k) \quad \forall \ell \leq k$ beachtet.

Aus (7.3.8) erhalten wir:

$$(1 + \varepsilon) \left(3 + \frac{9}{\tilde{\delta}} \right) \stackrel{(7.3.8)}{\leq} (1 + \varepsilon) \left(3 + \frac{2(1 - \delta)}{\delta} \right) = (1 + \varepsilon) \left(1 + \frac{2}{\delta} \right).$$

Damit gilt für den Mischungskoeffizienten α :

$$\alpha(k) \leq \text{const}_8 k^{-(1+\varepsilon)(3+\frac{9}{\tilde{\delta}})} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (7.3.11)$$

Weiter existieren für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Momente beliebiger Ordnung von Z_i .

Um Lemma 7.13 auf $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ anwenden zu können, zeigen wir:

Es gibt eine Konstante const_{35} , die unabhängig von n gewählt werden kann, so dass gilt:

$$\max_{1 \leq k \leq n} \mathbb{E} \|Z_i\|^{3+\tilde{\delta}} \leq \text{const}_{35} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \|Z_i\|^{3+\tilde{\delta}}. \quad (7.3.12)$$

Für m hinreichend groß (vgl. (7.3.7)) gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mathbb{E} \|Z_i\|^{3+\tilde{\delta}} &\geq \sum_{i=1}^m \mathbb{E} (\|Z_i\|^2)^{\frac{3+\tilde{\delta}}{2}} \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\mathbb{E} \|X_i\|^2 \mathbb{1}_{\{\|X_i\| \leq N^{\text{const}_{34}}\}} - \left\| \mathbb{E} X_i \mathbb{1}_{\{\|X_i\| \leq N^{\text{const}_{34}}\}} \right\|^2 \right)^{\frac{3+\tilde{\delta}}{2}} \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\mathbb{E} (\|X_i\|^2 - \|X_i\|^2 \mathbb{1}_{\{\|X_i\| > N^{\text{const}_{34}}\}}) \right. \\ &\quad \left. - \left\| \mathbb{E} X_i - \mathbb{E} X_i \mathbb{1}_{\{\|X_i\| > N^{\text{const}_{34}}\}} \right\|^2 \right)^{\frac{3+\tilde{\delta}}{2}} \\ &\stackrel{\mathbb{E} X_i = 0}{\geq} \sum_{i=1}^m \left(\mathbb{E} \|X_i\|^2 - 2 \mathbb{E} \|X_i \mathbb{1}_{\{\|X_i\| > N^{\text{const}_{34}}\}}\|^2 \right)^{\frac{3+\tilde{\delta}}{2}} \\ &\stackrel{(7.3.7)}{\geq} \text{const}_{36} \sum_{i=1}^m (\mathbb{E} \|X_i\|^2)^{\frac{3+\tilde{\delta}}{2}}, \end{aligned} \quad (7.3.13)$$

wobei $\text{const}_{36} := \text{const}_{36}(\text{const}_{34}, \text{const}_{30}, \text{const}_{31}, N) > 0$ (für N hinreichend groß).

Weiter gilt:

$$\|Z_i\| = \left\| X_i \mathbb{1}_{\{\|X_i\| \leq N^{\text{const}_{34}}\}} - \mathbb{E} (X_i \mathbb{1}_{\{\|X_i\| \leq N^{\text{const}_{34}}\}}) \right\| \leq 2N^{\text{const}_{34}}. \quad (7.3.14)$$

Damit erhalten wir für $1 \leq i \leq n$:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \|Z_i\|^{3+\tilde{\delta}} \\
&= \mathbb{E} \|Z_i\|^{2+\delta} \|Z_i\|^{1+\tilde{\delta}-\delta} \\
&\stackrel{(7.3.14)}{\leq} \mathbb{E} \|Z_i\|^{2+\delta} (2N)^{(1+\tilde{\delta}-\delta) \text{const}_{34}} \\
&\leq \mathbb{E} \left((\|X_i\| \mathbb{1}_{\{\|X_i\| \leq N^{\text{const}_{34}}\}} + \mathbb{E} \|X_i\| \mathbb{1}_{\{\|X_i\| > N^{\text{const}_{34}}\}}) \right)^{2+\delta} \\
&\quad (2N)^{(1+\tilde{\delta}-\delta) \text{const}_{34}} \\
&\leq \text{const}_{37} \mathbb{E} \|X_i\| \mathbb{1}_{\{\|X_i\| \leq N^{\text{const}_{34}}\}}^{2+\delta} (2N)^{(1+\tilde{\delta}-\delta) \text{const}_{34}} \\
&\stackrel{(7.3.6)}{\leq} \text{const}_{37} \text{const}_{29} (\mathbb{E} \|X_i\|^2)^{\frac{2+\delta}{2}} (2N)^{(1+\tilde{\delta}-\delta) \text{const}_{34}} \\
&\stackrel{(7.3.8)}{\leq} \text{const}_{37} \text{const}_{29} (2N)^{(1+\tilde{\delta}-\delta) \text{const}_{34}} \text{const}_{32} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\mathbb{E} \|X_j\|^2)^{\frac{3+\tilde{\delta}}{2}} \quad (7.3.15) \\
&\stackrel{(7.3.13), N \text{ hinr.gr.}}{\leq} \text{const}_{35} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \|Z_j\|^{3+\tilde{\delta}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{wobei } \text{const}_{35} &:= \text{const}_{35} \left(N, \tilde{\delta}, \delta, \text{const}_{29}, \text{const}_{30}, \text{const}_{31}, \text{const}_{32}, \text{const}_{34}, \text{const}_{37} \right) \\
&> 0 \text{ für } N \text{ hinreichend groß.}
\end{aligned}$$

Somit haben wir (7.3.12) gezeigt und können Lemma 7.13 anwenden.

Sei B_n die Kovarianzmatrix von $n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n Z_i$. Dann folgt mit Lemma 7.13:

$$\begin{aligned}
& \pi \left(\mathcal{L} \left(n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n Z_i \right), \mathcal{L} (N(0, B_n)) \right) \\
&\stackrel{\text{Lemma 7.13}}{\leq} \text{const}_{28} n^{-\frac{1}{20}} \left(1 + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \|Z_i\|^{3+\tilde{\delta}} \right)^{\frac{3}{3+\tilde{\delta}}} \right) \\
&\stackrel{(7.3.15)}{\leq} \text{const}_{28} n^{-\frac{1}{20}} \left(1 + \left(2^{2+\delta} \text{const}_{29} (2N)^{(1+\tilde{\delta}-\delta) \text{const}_{34}} \text{const}_{32} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbb{E} \|X_i\|^2)^{\frac{3+\tilde{\delta}}{2}} \right)^{\frac{3}{3+\tilde{\delta}}} \right) \\
&= \text{const}_{38} \left(n^{-\frac{1}{20}} \left(1 + N^{\frac{3}{3+\tilde{\delta}} (1+\tilde{\delta}-\delta) \text{const}_{34}} \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbb{E} \|X_i\|^2)^{\frac{3+\tilde{\delta}}{2}} \right)^{\frac{3}{3+\tilde{\delta}}} \right) \\
&\leq \text{const}_{38} \left(n^{-\frac{1}{20}} \left(1 + N^{\frac{3}{3+\tilde{\delta}} (1+\tilde{\delta}-\delta) \text{const}_{34}} \right) \max_{1 \leq i \leq n} (\mathbb{E} \|X_i\|^2)^{\frac{3}{2}} \right), \quad (7.3.16)
\end{aligned}$$

wobei const_{38} abhängig ist von $\tilde{\delta}$, δ , const_{29} , const_{32} , const_{34} , aber unabhängig von N oder n .

Wir schätzen nun den Fehler ab, der durch den Übergang von X_i zu Z_i entsteht.

$$1 + \frac{2}{\delta'} = 1 + \frac{2 + \varepsilon}{\delta} < (1 + \varepsilon) \left(1 + \frac{2}{\delta}\right).$$

Also existiert ein $\varepsilon' > 0$, so dass gilt:

$$(1 + \varepsilon') \left(1 + \frac{2}{\delta'}\right) < (1 + \varepsilon) \left(1 + \frac{2}{\delta}\right).$$

Damit erhalten wir insbesondere:

$$\alpha(k) \leq \text{const}_8 k^{-(1+\varepsilon')(1+\frac{2}{\delta'})} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (7.3.17)$$

Es gilt für $i < j$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(X_i - Z_i)'(X_j - Z_j) \\ \stackrel{\text{Lemma 7.11}}{\leq} & 10 \alpha(j - i)^{\frac{\delta'}{2+\delta'}} \|X_i - Z_i\|_{2+\delta'} \|X_j - Z_j\|_{2+\delta'} \\ = & 10 \alpha(j - i)^{\frac{\delta'}{2+\delta'}} \left(\mathbb{E} \|X_i \mathbb{1}_{\{\|X_i\| > N^{\text{const}_{34}}\}} - \mathbb{E} X_i \mathbb{1}_{\{\|X_i\| > N^{\text{const}_{34}}\}} \|^2 \right)^{\frac{1}{2+\delta'}} \\ & \left(\mathbb{E} \|X_j \mathbb{1}_{\{\|X_j\| > N^{\text{const}_{34}}\}} - \mathbb{E} X_j \mathbb{1}_{\{\|X_j\| > N^{\text{const}_{34}}\}} \|^2 \right)^{\frac{1}{2+\delta'}} \\ \leq & 10 \alpha(j - i)^{\frac{\delta'}{2+\delta'}} 4 \left(\mathbb{E} \|X_i \mathbb{1}_{\{\|X_i\| > N^{\text{const}_{34}}\}} \|^2 \right)^{\frac{1}{2+\delta'}} \\ & \left(\mathbb{E} \|X_j \mathbb{1}_{\{\|X_j\| > N^{\text{const}_{34}}\}} \|^2 \right)^{\frac{1}{2+\delta'}} \\ \leq & 40 \alpha(j - i)^{\frac{\delta'}{2+\delta'}} N^{-\frac{2(\delta-\delta') \text{const}_{34}}{2+\delta'}} \left(\mathbb{E} \|X_i \mathbb{1}_{\{\|X_i\| > N^{\text{const}_{34}}\}} \|^2 \right)^{\frac{1}{2+\delta'}} \\ & \left(\mathbb{E} \|X_j \mathbb{1}_{\{\|X_j\| > N^{\text{const}_{34}}\}} \|^2 \right)^{\frac{1}{2+\delta'}} \\ \leq & 40 \alpha(j - i)^{\frac{\delta'}{2+\delta'}} N^{-\frac{2(\delta-\delta') \text{const}_{34}}{2+\delta'}} \left(\mathbb{E} \|X_i\|^{2+\delta} \right)^{\frac{1}{2+\delta'}} \left(\mathbb{E} \|X_j\|^{2+\delta} \right)^{\frac{1}{2+\delta'}} \\ \stackrel{(7.3.6)}{\leq} & 40 \alpha(j - i)^{\frac{\delta'}{2+\delta'}} \text{const}_{29}^{\frac{2}{2+\delta'}} N^{-\frac{2(\delta-\delta') \text{const}_{34}}{2+\delta'}} (E \|X_i\|^2)^{\frac{2+\delta}{2(2+\delta')}} (E \|X_j\|^2)^{\frac{2+\delta}{2(2+\delta')}}. \end{aligned} \quad (7.3.18)$$

Mit (7.3.18) erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\| N^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^N X_i - N^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^N Z_i \right\|^2 \\ \leq & \frac{1}{N} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^N \|X_i - Z_i\| \right)^2 \\ = & \sum_{i=1}^N \mathbb{E} \|X_i - Z_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}(X_i - Z_i)'(X_j - Z_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(7.3.18)}{\leq} 40 \operatorname{const}_{29}^{\frac{2}{2+\delta'}} N^{-\frac{2(\delta-\delta')}{2+\delta'}} \operatorname{const}_{34} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (E \|X_i\|^2)^{\frac{2+\delta}{2+\delta'}} \right. \\
& \quad \left. + \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^{N-i} \alpha(j-i)^{\frac{\delta'}{2+\delta'}} (E \|X_i\|^2)^{\frac{2+\delta}{2(2+\delta')}} (E \|X_j\|^2)^{\frac{2+\delta}{2(2+\delta')}} \right) \\
& \stackrel{(7.3.17)}{\leq} 40 \operatorname{const}_8^{\frac{\delta'}{2+\delta'}} \operatorname{const}_{29}^{\frac{2}{2+\delta'}} N^{-\frac{2(\delta-\delta')}{2+\delta'}} \operatorname{const}_{34} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (E \|X_i\|^2)^{\frac{2+\delta}{2+\delta'}} \right. \\
& \quad \left. + \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^{N-i} (j-i)^{-(1+\varepsilon')} (E \|X_i\|^2)^{\frac{2+\delta}{2(2+\delta')}} (E \|X_j\|^2)^{\frac{2+\delta}{2(2+\delta')}} \right) \\
& \leq \operatorname{const}_{39} N^{-\frac{2(\delta-\delta')}{2+\delta'}} \operatorname{const}_{34} \max_{1 \leq i \leq N} (E \|X_i\|^2)^{\frac{2+\delta}{2+\delta'}}, \tag{7.3.19}
\end{aligned}$$

wobei $\operatorname{const}_{39}$ von const_8 , $\operatorname{const}_{29}$, δ , ε' abhängt, aber nicht von N oder n .

Mit Lemma 7.10 folgt aus (7.3.19):

$$\begin{aligned}
& \pi(N(0, A_N), N(0, B_N)) \\
& \leq \left(\operatorname{const}_{39} N^{-\frac{2(\delta-\delta')}{2+\delta'}} \operatorname{const}_{34} \max_{1 \leq i \leq N} (E \|X_i\|^2)^{\frac{2+\delta}{2+\delta'}} \right)^{\frac{1}{3}}, \tag{7.3.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \pi \left(\mathcal{L} \left(N^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^N X_i \right), \mathcal{L} \left(N^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^N Z_i \right) \right) \\
& \leq \left(\operatorname{const}_{39} N^{-\frac{2(\delta-\delta')}{2+\delta'}} \operatorname{const}_{34} \max_{1 \leq i \leq N} (E \|X_i\|^2)^{\frac{2+\delta}{2+\delta'}} \right)^{\frac{1}{3}}. \tag{7.3.21}
\end{aligned}$$

Aus (7.3.16), (7.3.20), (7.3.21) folgt (7.3.9), wenn man $N = n$ wählt. \square

Für die Beweise der Theoreme 2.5 sowie 2.6 benötigen wir noch das folgende Theorem.

Theorem 7.2. *Sei $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge p -dimensionaler Verteilungsfunktionen und $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge p -dimensionaler absolut regulärer Zufallsvektoren mit Mischungskoeffizienten β und Verteilungsfunktionen $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Für eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ gelte:*

$$\pi(F_i, G_i) \leq v_i \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{7.3.22}$$

Dann gibt es eine Folge unabhängiger Zufallsvektoren $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit Verteilungsfunktion F_i , so dass gilt:

$$P(\|X_i - Y_i\| \geq 2v_i) \leq 2 \left(\beta(i)^{\frac{1}{2}} + v_i \right) \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{7.3.23}$$

Beweis: Folgt unmittelbar aus Theorem 5 in [DePh82]. \square

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zum Beweis von Theorem 2.5.

Beweis: (von Theorem 2.5)

7 Anhang

Der Beweis von Theorem 2.5 ist ähnlich strukturiert wie der Beweis von Theorem 2.4 (vgl. Beweis von Theorem A.1 in [Hor97]).

Sei $m_0 := 0$, $m_\ell := \lceil \exp(\ell^\alpha) \rceil$ für $\ell \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 1$.

$$\text{Es gilt: } \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{m_\ell - m_{\ell-1}}{\ell^{\alpha-1} m_\ell} = \alpha, \quad \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{m_{\ell-1}}{m_\ell} = 1.$$

Damit erhalten wir:

Es gibt Konstanten const_{40} , const_{41} , const_{42} , so dass für alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\text{const}_{40} \ell^{\alpha-1} m_\ell \leq m_\ell - m_{\ell-1} \leq \text{const}_{41} \ell^{\alpha-1} m_\ell, \quad (7.3.24)$$

$$m_\ell \leq \text{const}_{42} m_{\ell-1}. \quad (7.3.25)$$

Die Konstanten const_{40} , const_{41} , const_{42} können dabei unabhängig von ℓ gewählt werden.

Sei für $\ell \in \mathbb{N}$:

$$Z(\ell) := \sum_{m_{\ell-1}+1}^{m_\ell} X_i.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \pi \left(\mathcal{L}(m_\ell - m_{\ell-1})^{-\frac{1}{2}} Z(\ell), \mathcal{L}(N(0, A)) \right) \\ & \stackrel{\text{Lem. 7.10, (2.0.3), Lem. 7.12}}{=} \text{const}_{43} \left((m_\ell - m_{\ell-1})^{-\frac{\delta}{9}} \left(\frac{1}{m_\ell - m_{\ell-1}} \sum_{i=m_{\ell-1}+1}^{m_\ell} \mathbb{E} \|X_i\|^{2+\delta} \right)^{\frac{2}{9}} \right. \\ & \quad \left. + (m_\ell - m_{\ell-1})^{-\frac{\vartheta}{3}} \right) \\ & \stackrel{(2.0.4)}{\leq} \text{const}_{44} \left((m_\ell - m_{\ell-1})^{-\frac{\delta}{9}} \left(\frac{1}{m_\ell - m_{\ell-1}} \sum_{i=m_{\ell-1}+1}^{m_\ell} (\mathbb{E} \|X_i\|^2)^{\frac{2+\delta}{2}} \right)^{\frac{2}{9}} \right. \\ & \quad \left. + (m_\ell - m_{\ell-1})^{-\frac{\vartheta}{3}} \right) \\ & \leq \text{const}_{45} \left((m_\ell - m_{\ell-1})^{-\frac{\delta}{9}} \max_{m_{\ell-1} < i \leq m_\ell} (\mathbb{E} \|X_i\|^2)^{\frac{\delta}{9}} \right. \\ & \quad \left. \left(\frac{1}{m_\ell - m_{\ell-1}} \sum_{i=m_{\ell-1}+1}^{m_\ell} \mathbb{E} \|X_i\|^2 \right)^{\frac{2}{9}} + (m_\ell - m_{\ell-1})^{-\frac{\vartheta}{3}} \right) \\ & \stackrel{(2.0.3)}{=} \text{const}_{46} \left((m_\ell - m_{\ell-1})^{-\frac{\vartheta\delta}{9}} + (m_\ell - m_{\ell-1})^{-\frac{\vartheta}{3}} \right) \\ & \stackrel{(7.3.24)}{=} \text{const}_{47} \left((\ell^{1-\alpha} m_\ell)^{-\frac{\vartheta\delta}{9}} + (\ell^{1-\alpha} m_\ell)^{-\frac{\vartheta}{3}} \right). \end{aligned} \quad (7.3.26)$$

Die auftretenden Konstanten können dabei unabhängig von ℓ gewählt werden.

Aus (7.3.26) folgt mit Theorem 7.2:

7 Anhang

Es gibt eine Folge unabhängig identisch normalverteilter zentrierter Zufallsvektoren $\{M_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ mit $\text{Cov } M_1 = A$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} & P \left(\left\| (m_\ell - m_{\ell-1})^{-\frac{1}{2}} Z(\ell) - M_\ell \right\| > 2 \text{const}_{47} \left((\ell^{1-\alpha} m_\ell)^{-\frac{\vartheta\delta}{9}} + (\ell^{1-\alpha} m_\ell)^{-\frac{\vartheta}{3}} \right) \right) \\ & \leq 2 \text{const}_{47} \left((\ell^{1-\alpha} m_\ell)^{-\frac{\vartheta\delta}{9}} + (\ell^{1-\alpha} m_\ell)^{-\frac{\vartheta}{3}} \right). \end{aligned} \quad (7.3.27)$$

Mit dem Lemma von Borel-Cantelli erhalten wir aus (7.3.27):

$$\begin{aligned} & \left\| (m_\ell - m_{\ell-1})^{-\frac{1}{2}} Z(\ell) - M_\ell \right\| \\ & \stackrel{P-f.s.}{\leq} 2 \text{const}_{48} \left((\ell^{1-\alpha} m_\ell)^{-\frac{\vartheta\delta}{9}} + (\ell^{1-\alpha} m_\ell)^{-\frac{\vartheta}{3}} \right). \end{aligned} \quad (7.3.28)$$

Zu M_ℓ gibt es eine Folge unabhängig identisch normalverteilter zentrierter Zufallsvektoren $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\text{Cov } Y_1 = A$, so dass gilt:

$$(m_\ell - m_{\ell-1})^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=m_{\ell-1}+1}^{m_\ell} Y_i = M_\ell. \quad (7.3.29)$$

Aus (7.3.28) sowie (7.3.29) erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \left\| (m_\ell - m_{\ell-1})^{-\frac{1}{2}} Z(\ell) - (m_\ell - m_{\ell-1})^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=m_{\ell-1}+1}^{m_\ell} Y_i \right\| \\ & \stackrel{P-f.s.}{\leq} 2 \text{const}_{48} \left((\ell^{1-\alpha} m_\ell)^{-\frac{\vartheta\delta}{9}} + (\ell^{1-\alpha} m_\ell)^{-\frac{\vartheta}{3}} \right). \end{aligned} \quad (7.3.30)$$

Mit (7.3.30) folgt:

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq \ell \leq k} \left\| Z(\ell) - \sum_{i=m_{\ell-1}+1}^{m_\ell} Y_i \right\| \\ & \stackrel{(7.3.30) \text{ } P-f.s.}{\leq} 2 \text{const}_{48} \sum_{i=1}^k \left(i^{\frac{(\alpha-1)\delta\vartheta}{9}} (m_i - m_{i-1})^{\frac{1}{2}} m_i^{-\frac{\vartheta\delta}{9}} + i^{\frac{(\alpha-1)\vartheta}{3}} (m_i - m_{i-1})^{\frac{1}{2}} m_i^{-\frac{\vartheta}{3}} \right) \\ & \stackrel{(7.3.24)}{\leq} \text{const}_{49} \sum_{i=1}^k \left(i^{\frac{(\alpha-1)\delta\vartheta}{9} + \frac{\alpha-1}{2}} m_i^{\frac{1}{2} - \frac{\vartheta\delta}{9}} + i^{\frac{(\alpha-1)\vartheta}{3} + \frac{\alpha-1}{2}} m_i^{\frac{1}{2} - \frac{\vartheta}{3}} \right) \\ & \leq \text{const}_{50} m_k^{\frac{1}{2} - \lambda_1} \end{aligned} \quad (7.3.31)$$

für $0 < \lambda_1 < \min \left(\frac{\vartheta}{3}, \frac{\vartheta\delta}{9} \right)$.

Die Konstante const_{50} kann dabei unabhängig von k gewählt werden.

$$\text{Sei } 0 < \lambda_2 < \frac{\delta\vartheta}{4 + 2\delta}. \quad (7.3.32)$$

Dann erhalten wir unter Anwendung von Lemma 7.9:

$$\begin{aligned}
& P \left(\max_{m_{\ell-1} < j \leq m_{\ell}} \left\| \sum_{i=m_{\ell-1}+1}^j X_i \right\| > m_{\ell}^{\frac{1}{2}-\lambda_2} \right) \\
&= P \left(\max_{m_{\ell-1} < j \leq m_{\ell}} \left\| \sum_{i=m_{\ell-1}+1}^j X_i \right\|^{2+\delta} > \left(m_{\ell}^{\frac{1}{2}-\lambda_2} \right)^{2+\delta} \right) \\
&\leq P \left(\max_{m_{\ell-1} < j \leq m_{\ell}} \left(\sum_{i=m_{\ell-1}+1}^j \|X_i\| \right)^{2+\delta} > \left(m_{\ell}^{\frac{1}{2}-\lambda_2} \right)^{2+\delta} \right) \\
&\stackrel{\text{Lemma 7.9}}{\leq} \frac{E \left(\sum_{i=m_{\ell-1}+1}^{m_{\ell}} \|X_i\| \right)^{2+\delta}}{m_{\ell}^{\left(\frac{1}{2}-\lambda_2\right)(2+\delta)}} \\
&\stackrel{\text{Unabh.}}{=} \frac{\sum_{i=m_{\ell-1}+1}^{m_{\ell}} E \|X_i\|^{2+\delta}}{m_{\ell}^{\left(\frac{1}{2}-\lambda_2\right)(2+\delta)}} \\
&\stackrel{(2.0.4)}{\leq} \text{const}_{51} \frac{\sum_{i=m_{\ell-1}+1}^{m_{\ell}} (E \|X_i\|^2)^{\frac{2+\delta}{2}}}{m_{\ell}^{\left(\frac{1}{2}-\lambda_2\right)(2+\delta)}} \\
&\leq \text{const}_{51} \frac{\left(\max_{m_{\ell-1} < i \leq m_{\ell}} E \|X_i\|^2 \right)^{\frac{\delta}{2}} \sum_{i=m_{\ell-1}+1}^{m_{\ell}} E \|X_i\|^2}{m_{\ell}^{\left(\frac{1}{2}-\lambda_2\right)(2+\delta)}} \\
&\stackrel{(2.0.3)}{\leq} \text{const}_{52} \frac{m_{\ell}^{\frac{\delta}{2}(1-\vartheta)} (m_{\ell} - m_{\ell-1})}{m_{\ell}^{\frac{(1-2\lambda_2)(2+\delta)}{2}}} \\
&\leq \text{const}_{52} m_{\ell}^{\frac{\delta}{2}(1-\vartheta)+1-(1-2\lambda_2)\frac{2+\delta}{2}} \\
&\stackrel{(7.3.32)}{\leq} \text{const}_{52} m_{\ell}^{-\lambda_3} \quad \text{für ein } \lambda_3 > 0. \tag{7.3.33}
\end{aligned}$$

Mit dem Lemma von Borel-Cantelli folgt aus (7.3.33):

$$\max_{m_{\ell-1} \leq j \leq m_{\ell}} \left\| \sum_{i=m_{\ell-1}}^j X_i \right\| \stackrel{P-f.s.}{\leq} \text{const}_{52} m_{\ell}^{\frac{1}{2}-\lambda_3} \quad \forall \ell \in \mathbb{N}. \tag{7.3.34}$$

Analog zu (7.3.34) erhalten wir:

$$\max_{m_{\ell-1} \leq j \leq m_{\ell}} \left\| \sum_{i=m_{\ell-1}}^j Y_i \right\| \stackrel{P-f.s.}{\leq} \text{const}_{53} m_{\ell}^{\frac{1}{2}-\lambda_4} \quad \forall \ell \in \mathbb{N} \quad \text{für ein } \lambda_4 > 0. \tag{7.3.35}$$

Aus (7.3.31), (7.3.34), (7.3.35) folgt unter Beachtung von (7.3.25) (2.0.5).

Für den Beweis von (2.0.6) gehen wir analog vor.

Sei $n \in \mathbb{N}$ zunächst fest, m_ℓ ($\ell \in \mathbb{N}$) wie oben gewählt und für $m_\ell \leq n$:

$$Z^*(\ell) := Z^{*(n)}(\ell) := \sum_{n-m_\ell+1}^{n-m_{\ell-1}} X_i.$$

Analog wie oben zeigt man:

$$\begin{aligned} & \pi \left(\mathcal{L} \left((m_\ell - m_{\ell-1})^{-\frac{1}{2}} Z^*(\ell) \right), \mathcal{L} \left(N(0, A) \right) \right) \\ & \leq \text{const}_{54} \left((\ell^{1-\alpha} m_\ell)^{-\frac{\vartheta\delta}{9}} + (\ell^{1-\alpha} m_\ell)^{-\frac{\vartheta}{3}} \right). \end{aligned} \quad (7.3.36)$$

Die Konstante const_{54} kann dabei unabhängig von ℓ gewählt werden.

Aus (7.3.36) folgt mit Theorem 7.2 und dem Lemma von Borel-Cantelli:

Es gibt eine Folge unabhängig identisch normalverteilter zentrierter Zufallsvektoren $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}} = \{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}^{\{n\}}$ mit $\text{Cov } Y_1 = A$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} & \left\| (m_\ell - m_{\ell-1})^{-\frac{1}{2}} Z^*(\ell) - (m_\ell - m_{\ell-1})^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=m_{\ell-1}+1}^{m_\ell} Y_i \right\| \\ & \stackrel{P-f.s.}{\leq} \text{const}_{54} \left((\ell^{1-\alpha} m_\ell)^{-\frac{\vartheta\delta}{9}} + (\ell^{1-\alpha} m_\ell)^{-\frac{\vartheta}{3}} \right). \end{aligned} \quad (7.3.37)$$

Mit (7.3.37) ergibt sich wie oben:

$$\max_{1 \leq \ell \leq k} \left\| Z^*(\ell) - \sum_{i=m_{\ell-1}+1}^{m_\ell} Y_i \right\| \stackrel{P-f.s.}{\leq} \text{const}_{50} m_\ell^{\frac{1}{2}-\lambda_1}. \quad (7.3.38)$$

Die Konstante const_{50} kann dabei unabhängig von k wie in (7.3.31) gewählt werden.

Aus (7.3.38), (2.0.5) folgt unter Beachtung von (7.3.25) (2.0.6). \square

Für den Beweis von Theorem 2.6 benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 7.15. *Sei $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge stark mischender zentrierter Zufallsvektoren. Die Momente der Ordnung $2 + \delta$ ($0 < \delta \leq 1$) existieren und sind gleichmäßig beschränkt, d.h. es gibt eine Konstante const_{55} , so dass gilt:*

$$\max_{1 \leq i \leq n} \mathbb{E} \|X_i\|^{2+\delta} < \text{const}_{55}. \quad (7.3.39)$$

Für den Mischungskoeffizienten α gelte:

Es gibt eine Konstante const_8 , so dass gilt:

$$\alpha(k) \leq \text{const}_8 \left(k^{-(1+\varepsilon)(1+\frac{2}{\delta})} \right) \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ für ein } \varepsilon > 0. \quad (7.3.40)$$

Dann gilt für alle $a \geq 0$, $0 \leq \delta^* \leq \frac{\varepsilon\delta}{8}$:

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{i=a+1}^{a+n} X_i \right\|^{2+\delta^*} \leq \text{const}_{56} n^{1+\frac{\delta^*}{2}} \quad \forall a \geq 0, n \geq 1.$$

Die Konstante const_{56} hängt dabei nicht von a oder n ab.

Beweis: Vgl. [Sor77], [KuPh80]: Lemma 2.5. □

Wir kommen zum Beweis von Theorem 2.6.

Beweis: (von Theorem 2.6)

Der Beweis von Theorem 2.6 ähnelt in seiner Struktur dem Beweis von Theorem 2.4 (vgl. Beweis von Theorem A.1 in [Hor97]).

Wir wählen const_{34} aus Lemma 7.14 so, dass gilt:

$$0 < \text{const}_{34} < \frac{3 + \tilde{\delta}}{60(1 + \tilde{\delta} - \delta)}. \quad (7.3.41)$$

$$\text{Sei für } \ell \in \mathbb{N} \ m_0 := 0, \ m_\ell := [\exp(\ell^\alpha)] \text{ für} \quad (7.3.42)$$

$$0 < \frac{4}{\vartheta + 1} < \alpha < \frac{\varepsilon\delta}{48 + 3\varepsilon\delta} \leq \frac{1}{51}.$$

Ein solches α existiert wegen $\vartheta > 11 + \frac{192}{\varepsilon\delta}$ und $0 < \delta < 1, 0 < \varepsilon \leq 1$.

Wie im Beweis zu Theorem 2.5 gilt:

Es gibt Konstanten $\text{const}_{57}, \text{const}_{58}, \text{const}_{59}$, so dass für alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\text{const}_{57} \ell^{\alpha-1} m_\ell \leq m_\ell - m_{\ell-1} \leq \text{const}_{58} \ell^{\alpha-1} m_\ell, \quad (7.3.43)$$

$$m_\ell \leq \text{const}_{59} m_{\ell-1}. \quad (7.3.44)$$

Die Konstanten $\text{const}_{57}, \text{const}_{58}, \text{const}_{59}$ können dabei unabhängig von ℓ gewählt werden.

Aus (2.0.9) folgt:

$$\max_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \|X_i\|^2 \leq \left(\max_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \|X_i\|^{2+\delta} \right)^{\frac{2}{2+\delta}} \leq \text{const}_4^{\frac{2}{2+\delta}}. \quad (7.3.45)$$

Es gibt $m \in \mathbb{N}$, und es gibt $\text{const}_{60} > 0$ (m, const_{60} unabhängig von ℓ), so dass gilt:

$$\frac{1}{m} \sum_{i=m_{\ell-1}+1}^{m+m_{\ell-1}} \mathbb{E} \|X_i\|^2 \stackrel{\text{Apos. def.}, (2.0.8)}{\geq} \text{const}_{60}. \quad (7.3.46)$$

Weiter gilt für eine beliebige Konstante $\text{const}_{61} > 0$:

$$\frac{1}{m} \sum_{i=m_{\ell-1}+1}^{m+m_{\ell-1}} \mathbb{E} \|X_i \mathbb{1}_{\{\|X_i\| \geq \text{const}_{61}\}}\|^2 \stackrel{(2.0.9)}{\leq} \text{const}_{61}^{-\delta} \text{const}_4. \quad (7.3.47)$$

Aus (7.3.46), (7.3.47) folgt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m} \sum_{i=m_{\ell-1}+1}^{m+m_{\ell-1}} \left(\mathbb{E} \|X_i\|^2 - 2 \mathbb{E} \|X_i \mathbb{1}_{\{\|X_i\| \geq \text{const}_{61}\}}\|^2 \right) \\ & \geq \text{const}_{60} - 2 \text{const}_{61}^{-\delta} \text{const}_4 =: \text{const}_{62} \geq 0 \quad \text{für } \text{const}_{61} \text{ hinreichend groß.} \end{aligned} \quad (7.3.48)$$

Wähle const_{61} so, dass $\text{const}_{62} \geq 0$.

Dann folgt mit (7.3.48) und der Jensenschen Ungleichung für $q \geq 1$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{m} \sum_{i=m_{\ell-1}+1}^{m+m_{\ell-1}} \left(\mathbb{E} \|X_i\|^2 - 2 \mathbb{E} \|X_i \mathbb{1}_{\{\|X_i\| \geq \text{const}_{61}\}}\|^2 \right)^q \\
 & \stackrel{\text{Jensen. Ungl.}}{\geq} \left(\frac{1}{m} \sum_{i=m_{\ell-1}+1}^{m+m_{\ell-1}} \left(\mathbb{E} \|X_i\|^2 - 2 \mathbb{E} \|X_i \mathbb{1}_{\{\|X_i\| \geq \text{const}_{61}\}}\|^2 \right) \right)^q \\
 & \stackrel{(7.3.48)}{\geq} \text{const}_{62}^q.
 \end{aligned} \tag{7.3.49}$$

$$\text{Sei } \text{const}_{63} := \left(\frac{\text{const}_{62}}{\text{const}_4^{\frac{2}{2+\delta}}} \right)^q.$$

Dann folgt mit (7.3.45), (7.3.49) für $q \geq 1$:

$$\sum_{i=m_{\ell-1}+1}^{m+m_{\ell-1}} \left(\mathbb{E} \|X_i\|^2 - 2 \mathbb{E} \|X_i \mathbb{1}_{\{\|X_i\| \geq \text{const}_{61}\}}\|^2 \right)^q \geq \text{const}_{63} \sum_{i=m_{\ell-1}+1}^{m+m_{\ell-1}} (\mathbb{E} \|X_i\|^2)^q.$$

$$\text{Sei } Z(\ell) := \sum_{m_{\ell-1}+1}^{m_{\ell}} X_i, \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned}
 & \pi \left(\mathcal{L} \left((m_{\ell} - m_{\ell-1})^{-\frac{1}{2}} Z(\ell) \right), \mathcal{L}(N(0, A)) \right) \\
 & \stackrel{\text{Lemma 7.10, (2.0.8), Lemma 7.14}}{=} \text{const}_{64} \left(\left((m_{\ell} - m_{\ell-1})^{-\frac{1}{20}} \right. \right. \\
 & \quad + (m_{\ell} - m_{\ell-1})^{\frac{3}{3+\delta} (1+\tilde{\delta}-\delta)} \text{const}_{34} - \frac{1}{20} \max_{m_{\ell-1} < i \leq m_{\ell}} (\mathbb{E} \|X_i\|^2)^{\frac{3}{2}} \\
 & \quad + (m_{\ell} - m_{\ell-1})^{-\frac{2(\delta-\delta')}{6+3\delta'}} \text{const}_{34} \max_{m_{\ell-1} < i \leq m_{\ell}} (E \|X_i\|^2)^{\frac{2+\delta}{6+3\delta'}} \\
 & \quad \left. \left. + \left(\frac{m_{\ell}}{m_{\ell} - m_{\ell-1}} (\log m_{\ell})^{-\vartheta} \right)^{\frac{1}{3}} \right) \right) \\
 & \stackrel{(7.3.41), (7.3.45)}{\leq} \text{const}_{65} \left((m_{\ell} - m_{\ell-1})^{-\theta_1} + \left(\frac{m_{\ell}}{m_{\ell} - m_{\ell-1}} (\log m_{\ell})^{-\vartheta} \right)^{\frac{1}{3}} \right) \\
 & \stackrel{(7.3.43)}{\leq} \text{const}_{65} \ell^{-\frac{1}{3}(\alpha+\vartheta\alpha-1)},
 \end{aligned} \tag{7.3.50}$$

wobei $\theta_1 > 0$. Die Konstante const_{65} kann unabhängig von ℓ gewählt werden.

Aus (2.0.7) folgt: $\{Z(\ell)\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ ist absolut regulär mit Mischungskoeffizienten:

$$\beta(l) \leq \text{const}_{66} \left(m_{\ell}^{-(1+\varepsilon)(1+\frac{2}{\delta})} \right) \quad \forall \ell \in \mathbb{N}. \tag{7.3.51}$$

Aus (7.3.50), (7.3.51) folgt mit Theorem 7.2:

Es gibt eine Folge unabhängig identisch normalverteilter zentrierter Zufallsvektoren $\{M_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ mit $\text{Cov } M_1 = A$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} & P \left(\left\| (m_\ell - m_{\ell-1})^{-\frac{1}{2}} Z(\ell) - M_\ell \right\| > 2 \text{const}_{67} \left(\ell^{-\frac{1}{3}(\alpha + \vartheta\alpha - 1)} \right) \right) \\ & \leq 2 \text{const}_{67} \ell^{-\frac{1}{3}(\alpha + \vartheta\alpha - 1)}. \end{aligned} \quad (7.3.52)$$

$$\frac{1}{3}(\alpha + \vartheta\alpha - 1) \stackrel{(7.3.42)}{>} 1. \quad (7.3.53)$$

Mit dem Lemma von Borel-Cantelli erhalten wir aus (7.3.52) mit (7.3.53):

$$\left\| (m_\ell - m_{\ell-1})^{-\frac{1}{2}} Z(\ell) - M_\ell \right\| \stackrel{P-f.s.}{\leq} 2 \text{const}_{68} \ell^{-\frac{1}{3}(\alpha + \vartheta\alpha - 1)}. \quad (7.3.54)$$

Zu M_ℓ gibt es eine Folge unabhängig identisch normalverteilter zentrierter Zufallsvektoren $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\text{Cov } Y_1 = A$, so dass gilt:

$$(m_\ell - m_{\ell-1})^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=m_{\ell-1}+1}^{m_\ell} Y_i = M_\ell. \quad (7.3.55)$$

Aus (7.3.54) sowie (7.3.55) erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \left\| (m_\ell - m_{\ell-1})^{-\frac{1}{2}} Z(\ell) - (m_\ell - m_{\ell-1})^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=m_{\ell-1}+1}^{m_\ell} Y_i \right\| \\ & \stackrel{P-f.s.}{\leq} 2 \text{const}_{68} \ell^{-\frac{1}{3}(\alpha + \vartheta\alpha - 1)}. \end{aligned} \quad (7.3.56)$$

Mit (7.3.56) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq \ell \leq k} \left\| Z(\ell) - \sum_{i=m_{\ell-1}+1}^{m_\ell} Y_i \right\| & \stackrel{(7.3.56)}{\leq} \text{const}_{68} \sum_{i=1}^k i^{-\frac{1}{3}(\alpha + \vartheta\alpha - 1)} (m_i - m_{i-1})^{\frac{1}{2}} \\ & \stackrel{(7.3.43)}{\leq} \text{const}_{69} \sum_{i=1}^k i^{\frac{\alpha-1}{2} - \frac{1}{3}(\alpha + \vartheta\alpha - 1)} m_i^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \text{const}_{69} k^{\frac{1+\alpha}{2} - \frac{1}{3}(\alpha + \vartheta\alpha - 1)} m_k^{\frac{1}{2}} \\ & = \text{const}_{69} (\log m_k)^{-\lambda_1} m_k^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (7.3.57)$$

$$\text{wobei } \lambda_1 := \frac{1}{6} \left(-1 + 2\vartheta - \frac{5}{\alpha} \right) \stackrel{(7.3.42)}{>} 1.$$

const_{69} kann unabhängig von ℓ gewählt werden.

Wir definieren δ^* so, dass

$$0 < \frac{6\alpha}{1-3\alpha} < \delta^* < \frac{\delta\varepsilon}{8}. \quad (7.3.58)$$

Ein solches δ^* existiert wegen (7.3.42).

Aus (7.3.58) folgt:

$$\exists \lambda_2 > 1 : (2 + \delta^*) \left(\frac{\alpha - 1}{2} + \lambda_2 \alpha \right) < -1. \quad (7.3.59)$$

$$\begin{aligned} & P \left(\max_{m_{\ell-1} < j \leq m_{\ell}} \left\| \sum_{i=m_{\ell-1}+1}^j X_i \right\| > m_{\ell}^{\frac{1}{2}} (\log m_{\ell})^{-\lambda_2} \right) \\ &= P \left(\max_{m_{\ell-1} < j \leq m_{\ell}} \left\| \sum_{i=m_{\ell-1}+1}^j X_i \right\|^{2+\delta^*} > \left(m_{\ell}^{\frac{1}{2}} (\log m_{\ell})^{-\lambda_2} \right)^{2+\delta^*} \right) \\ &\stackrel{\text{Lemma 7.9}}{\leq} \frac{\mathbb{E} \left(\sum_{i=m_{\ell-1}+1}^{m_{\ell}} \|X_i\| \right)^{2+\delta^*}}{\left(m_{\ell}^{\frac{1}{2}} (\log m_{\ell})^{-\lambda_2} \right)^{2+\delta^*}} \\ &\stackrel{\text{Korollar 7.15, (2.0.9)}}{\leq} \text{const}_{70} \frac{(m_{\ell} - m_{\ell-1})^{\frac{2+\delta^*}{2}}}{\left(m_{\ell}^{\frac{1}{2}} (\log m_{\ell})^{-\lambda_2} \right)^{2+\delta^*}} \\ &\stackrel{(7.3.43)}{\leq} \text{const}_{71} \ell^{\frac{(\alpha-1)(2+\delta^*)}{2} + \lambda_2 \alpha (2+\delta^*)} \\ &\stackrel{(7.3.59)}{\leq} \text{const}_{71} \ell^{-\lambda_3}, \end{aligned} \quad (7.3.60)$$

wobei $\lambda_3 > 1$. Die Konstante const_{71} kann unabhängig von k gewählt werden.

Mit dem Lemma von Borel-Cantelli folgt aus (7.3.60):

$$\max_{m_{\ell-1} < j \leq m_{\ell}} \left\| \sum_{i=m_{\ell-1}+1}^j X_i \right\| \stackrel{P-f.s.}{\leq} \text{const}_{72} m_{\ell}^{\frac{1}{2}} (\log m_{\ell})^{-\lambda_3}. \quad (7.3.61)$$

Analog erhalten wir:

$$\max_{m_{\ell-1} < j \leq m_{\ell}} \left\| \sum_{i=m_{\ell-1}+1}^j Y_i \right\| \stackrel{P-f.s.}{\leq} \text{const}_{73} m_{\ell}^{\frac{1}{2}} (\log m_{\ell})^{-\lambda_4} \quad \text{für ein } \lambda_4 > 1. \quad (7.3.62)$$

Aus (7.3.57), (7.3.61), (7.3.62) folgt unter Beachtung von (7.3.44) (2.0.11).

(2.0.12) folgt analog wie (2.0.11), indem man wie im Beweis zu Theorem 2.5 für $n \in \mathbb{N}$ fest, $\ell \in \mathbb{N}$, $m_{\ell} \leq n$

$$Z^*(\ell) := Z^{*(n)}(\ell) := \sum_{n-m_{\ell}+1}^{n-m_{\ell-1}} X_i$$

betrachtet. □

8 Literaturverzeichnis

Literatur

- [AbSa85] Abe, T., Saito, H.: Bayesian forecasting with multiple state space model, Elsevier Science Publisher B.V., 1985.
- [AlRo88] Alwan, L.C., Roberts, H.V.: Time series modeling for statistical process control, J. Business and Economic Statistics 6 (1), 87-95, 1988.
- [AmScFr97] Amin, R.W., Schmid, W., Frank, O.: The effects of autocorrelation on the R-chart and the S^2 -chart, Sankhyā 59, Series B, 229-255, 1997.
- [AnHu97] Antoch, J., Hušková, M., Prášková, Z.: Effect of dependence on statistics for determination of change, J. Statist. Plann. Infer. 60, 291-310, 1997.
- [Aok87] Aoki, M.: State Space Modeling of Time Series, Springer, 1987.
- [AuSt02] Aue, A., Steinebach, J.: A note on estimating the change-point of a gradually changing stochastic process, Statist. Prob. Letters 56, 177-191, 2002.
- [BaVo01] Baggerd, D., Vögeli, A.: Changepoint-Analyse in linearen Modellen mit korrelierten Fehlertermen, Bericht zum Fortgeschrittenenpraktikum, Philipps-Universität Marburg, November 2001.
- [BaNi93] Basseville, M., Nikiforov, V.: Detection of Abrupt Changes: Theory and Application, Prentice-Hall Inc., 1993.
- [Bau90] Bauer, H.: Maß- und Integrationstheorie, Walter de Gruyter, 1. Auflage, 1990.
- [Ber90] Berger, E.: An almost sure invariance principle for stationary ergodic sequences of Banach space valued random variables, Probab. Theory Rel. Fields 84 (2), 161-201, 1990.
- [Bre93] Breiman, L.: Probability, SIAM, 2nd edition, 1993.
- [BrDa87] Brockwell, P.J., Davis, R.A.: Time Series: Theory and Methods, 1st edition, Springer, 1987.
- [BrDa91] Brockwell, P.J., Davis, R.A.: Time Series: Theory and Methods, 2nd edition, Springer, 1991.
- [Bro93] Brodsky, B.E., Darkhovsky, B.S.: Nonparametric Methods in Change-Point Problems, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.
- [ChGa85] Chemouil, P., Garnier, B.: An adaptive short-term traffic forecasting procedure using kalman filtering, Elsevier Science Publishers B.V., 1985.
- [ChTe88] Chow, Y.S., Teicher, H.: Probability Theory, 2nd edition, Springer, 1988.
- [CsHo97] Csörgő, M., Horváth, L.: Limit Theorems in Change-Point Analysis, Wiley, 1997.

- [Cro87] Crowder, S.V.: A simple method for studying run length distributions of exponentially weighted moving average charts, *Technometrics* 29 (4), 401-407, 1987.
- [Cro88] Crosier, R.B.: Multivariate generalizations of cumulative sum quality-control schemes, *Technometrics* 30 (3), 291-303, 1988.
- [Csö75a] Csörgő, M., Révész, P.: A new method to prove Strassen type laws of invariance principle I., *Z. Wahrsch. Verw. Geb.* 31, 255-260, 1975.
- [Csö75b] Csörgő, M., Révész, P.: A new method to prove Strassen type laws of invariance principle II., *Z. Wahrsch. Verw. Geb.* 31, 261-269, 1975.
- [CsRé81] Csörgő, M., Révész, P.: *Strong Approximations in Probability and Statistics*, Wiley, 1981.
- [CsHo93] Csörgő, M., Horváth, L.: *Weighted Approximations in Probability and Statistics*, Wiley, 1993.
- [DaEr56] Darling, D.A., Erdős, P.: A limit theorem for the maximum of normalized sums of independent random variables, *Duke Math. J.* 23, 143-155, 1956.
- [DePh82] Dehling, H., Philipp, W.: Almost sure invariance principles for weakly dependent vector valued random variables, *Ann. Prob.* 10, 689-701, 1982.
- [Deh83] Dehling, H.: Limit theorems for sums of weakly dependent Banach space valued random variables, *Z. Wahrscheinlichkeitsth.* 63, 393-432, 1983.
- [Deo73] Deo, C.M.: A note on empirical processes of strong mixing sequences, *Ann. Prob.* 1, 870-875, 1973.
- [Ein87a] Einmahl, U.: A useful estimate in the multidimensional invariance principle, *Probab. Theory Rel. Fields* 76, 81-101, 1987.
- [Ein87b] Einmahl, U.: Strong invariance principles for partial sums of independent random vectors, *Ann. Prob.* 15, 1419-1440, 1987.
- [Ein89] Einmahl, U.: Extensions of results of Komlós, Major and Tusnády to the multivariate case, *J. Multivar. Analysis* 28, 20-68, 1989.
- [Gan95] Gan, F.F.: Joint monitoring of process mean and variance using exponentially weighted moving average control charts, *Technometrics* 37 (4), 446-453, 1995.
- [Gie99] Giese, J.: *Mathematisch-Statistische Analyse von Kenngrößen des Kommunikationsverhaltens*, Philipps-Universität Marburg und Deutsche Telekom, Projektbericht, 1999.
- [Gie00] Giese, J.: *Mathematisch-Statistische Analyse von Kenngrößen des Kommunikationsverhaltens*, Philipps-Universität Marburg und Deutsche Telekom, Projektbericht, 2000.
- [Gie01] Giese, J.: *Mathematisch-Statistische Analyse von Kenngrößen des Kommunikationsverhaltens*, Philipps-Universität Marburg und Deutsche Telekom, Projektbericht, 2001.

- [Gie02a] Giese, J.: Changepoint-Analyse für Kenngrößen der Telekommunikation: Anwendung, Projektbericht, 2002.
- [Gie02b] Giese, J.: Anwendung von Verfahren der Changepoint-Analyse zur Realisierung von Alarmsystemen, Vortragsfolien zur Präsentation in Bruchsal, 19.12.2002.
- [Gor77] Gorodetskii, V.V.: On the strong mixing property for linear sequences, *Theory Prob. Appl.* 22, 411-413, 1977.
- [GoSe77] Ghosh, M., Sen, P.K.: Sequential rank tests for regression, *Sankhyā* 39, Series A, 45-62, 1977.
- [HaKhSc00] Hanf, S., Khanjina, A., Schäfer, S.: Untersuchung von Eigenschaften von Kontrollkarten unter Verwendung der statistischen Programmiersprache R, Bericht zum Fortgeschrittenenpraktikum, Philipps-Universität Marburg, September 2000.
- [Ham94] Hamilton, J.D.: *Time Series Analysis*, Princeton University Press, 1994.
- [Haw89] Hawkins, D.L.: A U-I approach to retrospective testing for shifting parameters in a linear model, *Commun. Statist. Theory Methods* 18, 3117-3134, 1989.
- [Heu90] Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis Teil 2*, 5. Aufl., Teubner, 1990.
- [Hil00] Hilgenfeld, M.: Preiselastizitäten der Telekom-Minuten für die Tarifzone "Deutschland" (Stand: 26.01.2000), Arbeitspapier Deutsche Telekom AG, 2000.
- [Hor93] Horváth, L.: The maximum likelihood method for testing changes in the parameters of normal observations, *Ann. Statist.* 21, 671-680, 1993.
- [HoSh95] Horváth, L., Shao, Q.M.: Limit theorems for the union-intersection test, *J. Statist. Plann. Infer.* 44, 133-148, 1995.
- [Hor97] Horváth, L.: Detection of changes in linear sequences, *Ann. Inst. Statist. Math.* 49 (2), 271-283, 1997.
- [Hot47] Hotelling, H.: Multivariate quality control, illustrated by the air testing of sample bombsights, *Techniques of Statistical Analysis*, 111-184, 1947.
- [Hue89] Hübler, O.: *Ökonometrie*, Fischer, 1989.
- [Hus93] Huskővá, M.: Some sequential procedures based on regression rank scores, *Nonparam. Statist.* 3, 285-298, 1993.
- [Hus98a] Huskővá, M.: Sequential tests based on rank regression scores, *Sequential Analysis* 17, 115-122, 1998.
- [Hus98b] Huskővá, M.: Remarks on test procedures for gradual changes, *Asymptotic Methods in Probability and Statistics* (ed. by B. Szyszkowicz), Elsevier, 577-584, 1998.
- [Hus99] Huskővá, M.: Gradual changes versus abrupt changes, *J. Statist. Plann. Infer.* 76, 109-125, 1999.

- [HuSt00] Husková, M., Steinebach, J.: Limit theorems for a class of tests of gradual changes, *J. Statist. Plann. Infer.* 89, 57-77, 2000.
- [IbSo69] Ibragimov, I.A., Solev, V.N.: A condition for regularity of a gaussian stationary process, *Soviet. Math. Dokl.* 10 (2), 1969.
- [IbRo78] Ibragimov, I.A., Rozanov, Y.A.: *Gaussian Random Processes*, Springer, 1978.
- [Jar98] Jarůšková, D.: Testing appearance of linear trend, *J. Statist. Plann. Infer.* 70, 263-276, 1998.
- [Koe85] Koecher, M.: *Lineare Algebra und Analytische Geometrie*, Springer, 2. Auflage, 1985.
- [KoMaTu75] Komlós, J., Major, P., Tusnády, G.: An approximation of partial sums of independent r.v.'s and the sample df. I., *Z. Wahrsch. Verw. Geb.* 32, 111-131, 1975.
- [KoMaTu76] Komlós, J., Major, P., Tusnády, G.: An approximation of partial sums of independent r.v.'s and the sample df. II., *Z. Wahrsch. Verw. Geb.* 34, 33-58, 1976.
- [KrSc97] Kramer, H., Schmid, W.: EWMA charts for multivariate time series, *Sequential Analysis* 16 (2), 131-154, 1997.
- [KrSc00] Kramer, H., Schmid, W.: The influence of parameter estimation on the ARL of Shewhart type charts for time series, *Statist. Papers* 41, 173-196, 2000.
- [KuPh80] Kuelbs, J., Philipp, W.: Almost sure invariance principles for partial sums of mixing B-valued random variables, *Ann. Prob.* 8, 1003-1036, 1980.
- [LeLiRo83] Leadbetter, M.R., Lindgren, L., Rootzén, H.: *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*, Springer, 1983.
- [Lom87] Lombard, F.: Rank tests for Changepoint problems, *Biometrika* 74 (3), 615-624, 1987.
- [LuRe97] Lu, C.W., Reynolds, M.R.Jr.: Control charts for monitoring processes with autocorrelated data, *Nonlin. Anal., Theory Methods Appl.* 30, No.7, 4059-4067, 1997.
- [Maj76a] Major, P.: Approximation of partial sums of i.i.d. r.v.'s, *Z. Wahrsch. Verw. Geb.* 35, 213-220, 1976.
- [Maj76b] Major, P.: Approximation of partial sums of i.i.d. r.v.'s when the summands have only two moments, *Z. Wahrsch. Verw. Geb.* 35, 221-230, 1976.
- [NiQu82] Nicholls, D.F., Quinn, B.G.: *Random Coefficient Autoregressive Models: An Introduction*, *Lecture Notes in Statistics*, Springer, 1982.
- [OlTo81] Olkin, I., Tomsky, J.L.: A new class of multivariate tests based on the union-intersection principle, *Ann. Stat.* 9, 792-802, 1981.
- [Pag54] Page, E.S.: Continuous inspection schemes, *Biometrika* 41, 100-115, 1954.

- [Phi79] Philipp, W.: Almost sure invariance principles for sums of B-valued random variables, Prob. in Banach Spaces II, Lecture Notes in Math. 709, 171-193, Springer, 1979.
- [Rie00] Riedle, M.: Zur Schätzung von Varianzen in der Changepoint-Analyse, Diplomarbeit, Philipps-Universität Marburg, Fachbereich Mathematik und Informatik, 2000.
- [Rob59] Roberts, S.W.: Control chart tests based on geometric moving averages, Technometrics 1 (3), 239-250, 1959.
- [Roy53] Roy, S.N.: On a heuristic method of test construction and its use in multivariate analysis, Ann. Math. Stat. 24, 220-238, 1953.
- [Roy57] Roy, S.N.: Some Aspects of Multivariate Analysis, Wiley, 1957.
- [RoGnSr71] Roy, S.N., Gnanadesikan, R., Srivastava, J.N.: Analysis and Design of Certain Quantitative Multiresponse Experiments, Pergamon Press, 1971.
- [Sch95] Schmid, W.: On the run length of a Shewhart chart for correlated data, Statist. Papers 36, 111-130, 1995.
- [Sch97] Schmid, W.: On EWMA charts for time series, Frontiers in Statistical Quality Control, Physica Heidelberg, 115-137, 1997.
- [ScSc97] Schmid, W., Schöne, A.: Some properties of the EWMA control chart in the presence of autocorrelation, Ann. Statist. 25 (3), 1277-1283, 1997.
- [ScScKn99] Schöne, A., Schmid, W., Knoth, S.: On the run length of the EWMA scheme - a monotonicity result for normal variables, J. Statist. Plann. Infer. 79, No.2, 289-297, 1999.
- [ScSt00] Schmid, W., Steland, A.: Sequential control of non-stationary processes by nonparametric kernel control charts, Allgemeines Statistisches Archiv 84, 315-336, 2000.
- [She31] Shewhart, W.A.: Economic Control of Quality of Manufactured Product, D. van Nostrand Company Inc., Toronto, 1931.
- [Sor77] Sotres, D.A., Gosh, M.: Strong convergence of linear rank statistics for mixing processes, Sankhyā 39, Series B, 1-11, 1977.
- [Ste00] Steinebach, J.: Some remarks on testing of smooth changes in the linear drift of a stochastic process, Theor. Prob. and Math. Statist. 61, 2000.
- [StHo00] Steinebach, J., Horváth, L.: Testing for changes in the mean or variance of a stochastic process under weak invariance, J. Statist. Plann. Infer. 91, 365-376, 2000.
- [Str64] Strassen, V.: An invariance principle for the law of the iterated logarithm, Z. Wahrsch. Verw. Geb. 3, 211-226, 1964.

- [Str65] Strassen, V.: Almost sure behaviour of sums of independent random variables and martingales, Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. 2, 315-343, 1965.
- [Tom85] Tome, F.M., Chuna, J.A.: Traffic forecasting with a state-space model, Elsevier Science Publishers B.V., 1985.
- [Vaa98] Van der Vaart, A.W.: Asymptotic Statistics, Cambridge University Press, 1998.
- [VaSt78] Vasilopoulos, A.V., Stamboulis, A.P.: Modification of control chart limits in the presence of data correlation, Journal of Quality Technology 10 (1), 20-30, 1978.
- [WaMoPl94] Wardell, D.G., Moskowitz, H., Plante, R.D.: Run length distribution of special cause control charts for correlated processes (with discussion), Technometrics 36 (1), 3-27, 1994.
- [Wie98] Wieringa, J.E: Statistical process control for serially correlated data, p.h.d. thesis, University of Groningen, 1998.
- [Zac99] Zack, S., Wang, X.: Estimation of variance components in dynamic linear models, Statist. Prob. Letters 41, 325-330, 1999.

Danksagung

Mein herzlicher Dank gilt allen, die mich während der Fertigstellung meiner Arbeit durch Hinweise, Ideen und Kritik unterstützt haben.

Ich danke Herrn Prof. Dr. Josef Steinebach für die Betreuung und die fachliche Unterstützung der Arbeit.

Weiterhin danke ich Herrn Dr. Robert Jäger, Herrn Heiko Zimmermann, Herrn Michael Hilgenfeld von der Deutschen Telekom, Bruchsal, die die Arbeit aus Anwendersicht wesentlich beeinflusst haben. Herrn Heiko Zimmermann ist es zu verdanken, dass das Statistikprogramm R einen weiteren begeisterten Anwender gefunden hat.

Meinen Kollegen Herrn Alexander Aue und Herrn Ralf Jäger danke ich für zahlreiche interessante Diskussionen über Theorie und Anwendung statistischer Verfahren.

Weiterhin danke ich Herrn Michael Koch, der mehr von Algebra als von Statistik versteht, aber als geduldiger Zuhörer mir zur Lösung mancher Probleme verholfen hat.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. Lothar Gutsche, der diese Arbeit möglich gemacht hat. Als Initiator des Gesamtprojekts "Dynamische Modelle zur Preiskalkulation in der Telefonnetzkommunikation", in dem neben der vorliegenden Dissertation noch drei weitere Doktorarbeiten von der Deutschen Telekom gefördert wurden, war er verantwortlich für die Betreuung der vier Doktoranden.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Dissertationsschrift selbstständig verfasst und keine anderen Hilfsmittel als die angegebenen verwendet habe.

Die Dissertation wurde in der jetzigen oder einer ähnlichen Form noch bei keiner anderen Hochschule eingereicht und hat noch keinen sonstigen Prüfungszwecken gedient.

Marburg, den 05.12.2002

Lebenslauf

Name		Jochen Friedrich Giese
Geburtsdatum		18.03.1970
Geburtsort		Marburg/Lahn
Familienstand		ledig
Schulbildung	1976 - 1980 1980 - 1982 1982 - 1989 Mai 1989	Grundschule Kirchhain Förderstufe, Gesamtschule Kirchhain Gymnasium, Gesamtschule Kirchhain Abitur
Wehrdienst	Juni 1989 - August 1990	in Marburg/Lahn
Studium	Oktober 1990 - Juli 1996 Oktober 1992 Juli 1996	Studium der Diplom-Mathematik mit Nebenfach Informatik an der Philipps-Universität Marburg Vordiplom Diplom
Berufspraxis	August 1996 bis März 1999 seit April 1999	Softwareentwickler bei Siemens in Bad Hersfeld Von der Deutschen Telekom geförderter Doktorand an der Philipps-Universität Marburg